數學傳播 30卷2期, pp. 40-50

圓之吻：阿波羅尼斯問題的歷史

汪曉勤・張小明

摘要: 所謂阿波羅尼斯問題, 即指求作一圓, 使與已知三圓相切。該問題從提出至今, 已歷兩千二百餘年。眾多數學家爲它所吸引, 韋達、笛卡兒、牛頓、熱爾崗、龐斯列等一流數學家都相繼給出他們的解法。我們有理由相信, 這個古老的數學問題明天仍將激發數學家們無盡的智慧。

關鍵字: 阿波羅尼斯, 韋達, 牛頓, 熱爾崗, 位似中心, 綜合法。

雙唇彼此之吻
或與三角無關
四圓兩兩互吻
絕非如此簡單

—— 索迪

西元前3世紀, 古希臘大數學家阿波羅尼斯 (Apollonius, 前260～前190) 著「論相切」, 共2卷。儘管該書遠不及他的另一部著作「圓錐曲線」著名, 但其中的數學問題卻是後世數學家孜孜以求的目標。根據3世紀希臘數學家帕普斯 (Pappus) 的記載, 該書包含這樣的問題:

> “已給三個元素, 每個元素爲點、直線或圓之一種。求作一圓, 過已知點 (如果元素中有點的話), 且與已知直線或圓相切。”

阿波羅尼斯按已知條件將問題分成10種: 點點點、線線線、點點線、點線線、點點圓、點圓圓、線線圓、線圓圓、點線圓、圓圓圓。歐幾裏得在「原本」第四卷討論了前兩種, 而阿波羅尼斯在「論相切」中討論了其餘8種。人們通常將難度最大的第十種 (求作一圓, 使其與已知三圓相切) 稱爲 “阿波羅尼斯問題”。

1. 希思所復原的阿波羅尼斯解法

「論相切」原書已失傳, 我們不知道阿波羅尼斯是如何解決這個難題的。英國著名數學史家希思 (T. L. Heath, 1861～1940) 根據帕普斯所知道的如下三命題對其作了復原:

1. 如果兩圓相切, 那麼過切點的直線將兩圓分成的兩部分各相似;
2. 三個圓的三個位似外心、一個位似外心和兩個位似內心分別共線, 六個位似心共位於四條直線上[1]。
3. 作圓內接三角形, 使其三邊延長線分別經過三個共線的已知點。

若三個已知圓 O_1、O_2 和 O_3 的半徑分別爲 r_1、r_2 和 r_3, A、B、C 是三個位似外心, 分別滿足 $AO_2 : AO_3 = r_2 : r_3$, $BO_1 : BO_3 = r_1 : r_3$, $CO_1 : CO_2 = r_1 : r_2$, 假設與三圓 O_1、O_2 和 O_3 相外切的圓 O 已經作出, P、Q、R 是三個切點。延長 PQ, 分別交圓 O_1 和 O_2 於 D、E; 由命題1, 弓形 DMP 和 QNE 均與 PTQ 相似, 因而它們彼此相似。從而知 PQ 延長線經過位似中心 C。同理可證 QR、PR 的延長線分別經過位似中心 B 和 A。設 QA、PB 與圓 O_3 交於 G、K, 因弓形 PQR 和 RGK 相似, 故 $\angle PQR = \angle RGK$。因此 $GK//PQ$。延長 GK, 交 BC 於L。於是

$$BL : BC = BK : BP = BO_3 : BO_1 = r_3 : r_1$$

因此點 L 就得到確定。因此問題轉化爲: 已知共線三點 L、B、A, 求圓 O_3 上一點 R, 使得若 AR、BR 交圓 O_3 於 G、K, 則 GK 的延長線通過點 L。這就是帕普斯的命題3。求得點 R 後, 只需連接 AR、BR 並延長, 分別交圓 O_2 和 O_1 於 Q、P。過 P、Q、R 三點的圓即爲所求。

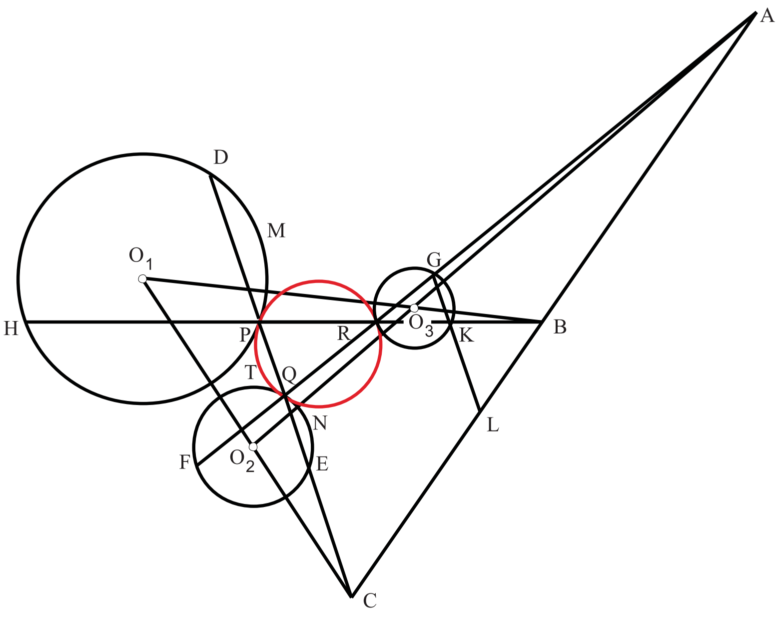

圖 1. 希思對阿波羅尼斯解法的復原

[1]今稱“達朗貝爾定理”, 四直線稱爲三圓的“相似軸”。

2. 韋達和羅曼努斯

法國數學家韋達 (F. Viète, 1540～1603) 根據前人的研究, 對「論相切」一書作了復原, 於1600年出版。書中系統論述了阿波羅尼斯提出的問題, 給出了十種情況的解, 後一情況的解法建立在前一解法的基礎之上。爲了解決每一種特殊情形, 韋達建立了許多輔助命題和引理。值得注意的是, 韋達運用了兩圓的位似中心, 如希思所認爲的那樣, 這可能最接近阿波羅尼斯的思想。但是, 韋達可能對問題的解的個數並沒有全面的認識。後來, 牛頓 (I. Newton, 1642～1727) 在「普遍的算術」中複製了韋達的解法。韋達的解法大致如下:

先解決“點點圓”問題, 即: 求作過兩個定點 A、B 且與已知圓 O_1 相切的圓。如圖2, 先作過定點 A、B 且和圓 O_1 相交的圓, 設交點爲 C、D, BA 和 DC 的延長線相交於 P, 從 P 引圓 O_1 的切線 PT_1 和 PT_2, 切點分別爲 T_1、T_2, 則過點 A、B、T_1 和 A、B、T_2 的圓即爲所求。

再解決“點圓圓”問題, 即求作過定點 A 且與已知兩圓 O_1、O_2 相切的圓。如圖3, 作兩圓 O_1、O_2 的位似外心 P, 設 O_1O_2 分別與圓 O_1 和 O_2 交於 C、D, 過 A、C、D 三點的圓和 PA 交點爲 B, 用上述“點點圓”問題的方法, 作過兩點 A、B 且和圓 O_1 相切的圓, 即爲所求。

最後解決“圓圓圓”問題, 即阿波羅尼斯問題。若三個已知圓 O_1、O_2 和 O_3 的半徑分別爲 r_1、r_2 和 r_3, 設 $r_1 > r_2 > r_3$, 以 O_1、O_2 爲圓心, 分別作半徑爲 $r_1 - r_3$、$r_2 - r_3$ 的兩個圓, 用上述 “點圓圓”問題的方法, 過點 O_3 作與這兩圓相外切和相內切的圓, 其圓心分別爲 O、O', 則以 O 爲心且與圓 O_3 相外切的圓, 以及以 O' 爲心且與圓 O_3 相內切的圓, 即爲所求, 如圖3所示。

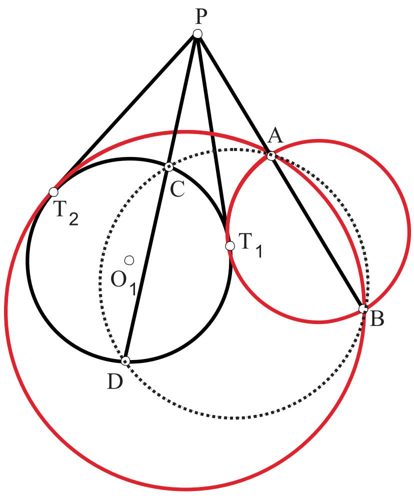

圖 2 “點點圓”問題

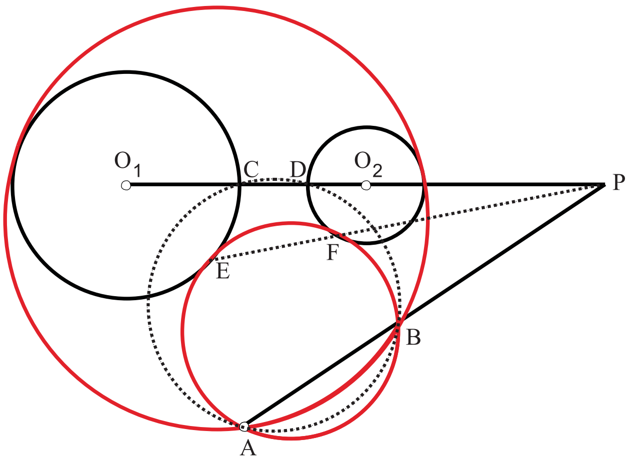

圖 3 “點圓圓”問題

1593年, 作爲對比利時數學家羅曼努斯 (A. Romanus, 1561～1615) 所提45次方程問

題的回應, 韋達向羅曼努斯提出了阿波羅尼斯問題。羅曼努斯給出了如下的解法: 如果圓 O 和與兩圓 O_1、O_2 相切, 則 OO_1、OO_2 的差等於已知圓 O_1、O_2 的半徑之差 (常數) , 因此, 圓心 O 應在以 O_1、O_2 爲焦點的雙曲線上; 同理, O 也在以 O_2、O_3 爲焦點的雙曲線上, 從而, 所求圓的圓心可以用兩條雙曲線的交點來確定。

然而, 韋達對這一解法並不滿意, 由於阿波羅尼斯問題只允許用直尺和圓規來作圖, 因此他認爲不可以用圓錐曲線來確定圓心。

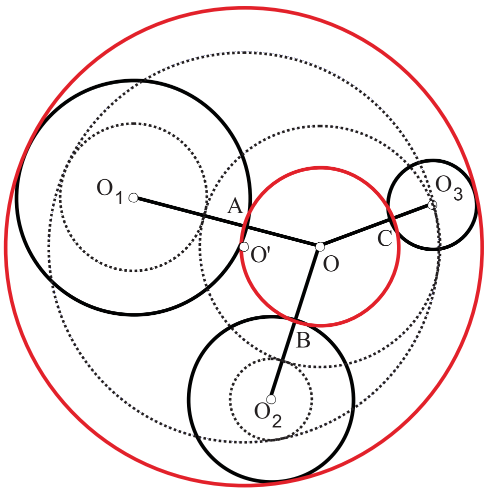

圖 4 韋達的解法

3. 牛頓的解法

在「自然哲學之數學原理」中, 牛頓再次回到阿波羅尼斯問題 (第1卷, 第4章, 引理16) 上來。他的解法利用了羅曼努斯的思路, 應用了雙曲線的性質。牛頓的引理如下:

> 由三個已知點向第四個未知點作三條直線 (段) , 使其差或爲已知, 或爲零。

顯然, 如果將已知三點分別作爲三個圓的圓心, 三線段兩兩之間的差爲相應圓的半徑之差, 那麼所求的第四點即爲阿波羅尼斯問題中所求圓的圓心。牛頓將命題分成三種情形進行討論。

情形1. 三線段兩兩不等。設已知點爲 A、B、C, Z 是所求的第四個點。因爲 AZ 和 BZ 的差是給定的, 所以點 Z 的軌跡是一條雙曲線, 其焦點爲 A、B, 實軸爲給定的差。設實軸爲 MN。在 MN 上取一點 P, 使得 $PM : MA = MN : AB$。作 $PR \perp AB$ (PR 是雙曲線的準線), $ZR \perp PR$, 於是由雙曲線性質知:

$$ZR : AZ = MN : AB \tag{1}$$

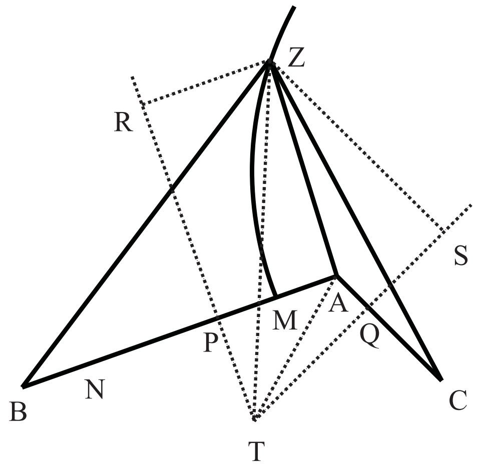

圖 5. 牛頓的解法

同理, 點 Z 的軌跡是另一條雙曲線, 其焦點爲 A、C, 實軸爲 AZ 和 CZ 的差 (設爲 UV), 同樣作準線 QS, 作 $ZS \perp QS$, 從而

$$ZS : AZ = UV : AC \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 可得:

$$ZR : ZS = (MN \cdot AC) : (UV \cdot AB).$$

若 RP 與 SQ 交於點 T, 因點 Z 到兩條給定直線 PQ 和 QS 的距離之比是給定的, 因而點 Z 的軌跡是一條過點 T 的直線。由於 TZ 的位置已知, 因而 $TZ : ZS$ 是給定的; 但由 (2), $AZ : ZS$ 是已知的, 所以 $AZ : TZ$ 是已知的。又 TA 和 $\angle ATZ$ 是給定的, 所以三角形 ATZ 是確定的。它的頂點即是點 Z。

我們知道, 在三角形 ZTA 中, 給定底邊 TA 以及兩腰之比 $ZT : ZA$, 其頂點 Z 的軌跡是一個圓 (今稱阿波羅尼斯圓)。因此這裡牛頓成功地將羅曼努斯的兩條雙曲線的交點轉化爲可用尺規作出的直線和圓的交點。

情形2. 有兩條線段相等。如 $AZ = BZ$, 則直線 TZ 平分 AB, 然後根據情形1的方法確定 $\triangle ATZ$ 即可。

情形3. 三線段均相等。此時 Z 爲 A、B、C 三點確定的圓的圓心。

1881年, 愛爾蘭數學家凱西 (J. Casey, 1820∼1891) 重新發現了牛頓的解法。和韋達一樣, 牛頓沒有討論阿波羅尼斯問題的解的個數。也許是他只注重物理學中的應用, 因而認爲這樣的討論並不重要。在命題21中, 牛頓利用了上述引理, 在附注中, 牛頓這樣說:

> “當圓錐曲線是雙曲線時, 上述討論中不包括共軛雙曲線。因為物體沿一條雙曲線連續運動時不可能跳躍到它的共軛雙曲線軌道上。”

根據這個說法, 很顯然牛頓運用阿波羅尼斯問題的目的是確定天體運行的軌道。阿波羅尼斯問題還在第一次世界大戰中發揮了重要作用: 從不同的三個點傾聽敵人的槍聲, 利用阿波羅尼斯問題即可確定敵人的位置。據說美國軍隊對此法很感興趣。

4. 從解析法回到綜合法

解析幾何這個有效的新工具發明後, 很多人便想在古老的魅力無窮的阿波羅尼斯問題上初試牛刀。笛卡兒本人找到了兩種解法, 第一種非常複雜, 以至於這位解析幾何的開山鼻祖也不能保證在一個月內完成作圖。第二種方法雖簡單得多, 但其複雜程度也足以讓笛卡兒望而卻步!

在試圖用解析方法來解阿波羅尼斯問題的人中, 有一位是英格蘭公主 (國王詹姆斯一世之女)、波希米亞王后 (弗雷德裏克五世之妻) — 伊麗沙白 (Elizabeth, 1596∼1662), 她把自己的解法寄給了笛卡兒, 但笛卡兒發現她的解法並不比自己的高明多少。1643年11月, 笛卡兒在一封信中將三圓兩兩外切情形下的阿波羅尼斯問題的解法告訴了伊麗莎白。設兩兩外切的三圓半徑分別為 r_1、r_2 和 r_3, r 為與這三個圓都外切的第四個圓的半徑, 則笛卡兒給出的結果相當於

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}=2\Big(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}+\frac{1}{r_1r}+\frac{1}{r_2r}+\frac{1}{r_3r}\Big)$$

今稱 “笛卡兒圓定理”。兩個世紀後, 英國數學家貝克羅夫特 (P. Beecroft) 重新發現了這個結果。

儘管笛卡兒等人不成功的嘗試使法國數學史家蒙蒂克拉 (J. E. Montucla, 1725∼1799) 在其「數學史」中斷言阿波羅尼斯問題難以用解析方法來解決, 但18世紀數學家們並沒有因此放棄對代數方法的尋求。1788年, 歐拉 (L. Euler, 1707∼1783) 和他的學生尼古拉·弗斯 (N. Fuss, 1755∼1826) 在「聖彼得堡科學院院刊」上分別發表了一個代數解法。事實上, 該問題相當於解一個三元二次方程組。

18世紀後期, 發軔於畫法幾何創立者蒙日 (G. Monge, 1746∼1818) , 繼之於蒙日的學生和追隨者, 綜合幾何學得到了復興。這個時期, 新的幾何概念層出不窮, 如點對圓的冪、兩個圓的等冪軸、三個圓的正交圓、兩個和三個圓的位似中心和相似軸、圓系等等, 這些新的或重新提出的概念大大豐富了圓的理論, 同時又促使數學家們利用這些新概念去解決阿波羅尼斯問題。

19世紀初, 法國著名數學家龐斯列 (J. V. Poncelet, 1788∼1867) 創立了綜合射影幾何學, 為解決幾何問題提供了新方法, 其中極點與極線理論可直接用於對圓的研究。另一方面, 綜合幾何學的成就又促使那些崇尚解析方法的人們對自己的工具進行了成功的改進。19世紀上

葉, 兩個學派競爭激烈, 分庭抗禮, 平分秋色。在這種對峙狀態下, 阿波羅尼斯問題成了檢驗兩種方法孰優孰劣的試金石。於是, 人們對阿波羅尼斯問題的興趣越發濃厚了。

蒙日的學生, 詩人、政治家和數學家卡諾 (L. N. M. Carnot, 1753∼1823) 在出版於1801年的「幾何圖形的相互關係」中, 利用二次方程求出了阿波羅尼斯問題中所求圓的半徑, 並將切點作爲位似中心來確定。在出版於1803年的另一部著作「位置幾何學」中, 卡諾又概述了阿波羅尼斯問題的代數解法。德國大數學家高斯 (C. F. Gauss, 1777∼1855) 在卡諾「位置幾何學」德譯本 (1810) 的一個注釋中, 完成了卡諾的代數解法, 並成功地對卡諾的計算進行了簡化, 一如牛頓對羅曼努斯的解法作出改進一樣。

1806年, 巴黎綜合工科學校一年級學生柯西 (A. L. Cauchy, 1789∼1857) 發表了阿波羅尼斯問題的一個解法, 這是柯西一生中發表的第一篇論文。1811年, 柯西的校友龐斯列也在一年級時發表阿波羅尼斯問題的一個解法。

從韋達到龐斯列, 儘管每位數學家所給出的解法都有其獨到之處, 但它們所討論的都只是阿波羅尼斯問題的各種特殊情況。在新的時代, 新的幾何工具使人們對問題的解提出更高的要求, 韋達的分步解法已經不能爲人們所接受。人們需要一種直接的解法, 而這種解法應該能夠適用於韋達以來的數學家們所考慮的所有特殊情形, 並且對於每一種情形, 能夠確定解的個數。

5. 熱爾崗的一般解法

阿波羅尼斯問題的第一個一般性結果是熱爾崗 (J. D. Gergonne, 1771∼1859) 於1816年給出的, 他的結果發表在由他自己創辦的雜誌「數學年刊」上, 熱爾崗應用了分析法。

如圖6, 已知圓 O_1、O_2 和 O_3, 假設已經作出一對圓 O 和 O', 它們與圓 O_1、O_2 和 O_3 分別相切於 A、B、C 和 A'、B'、C'。因圓 O_1 同時與圓 O 和 O' 相切, 故 $A'A$ 經過圓 O 和 O' 的位似中心 S; 同理 $B'B$、$C'C$ 也經過點 S。又因 $SA\cdot SA'=SB\cdot SB'$, 所以 S 對圓 O_1 和 O_2 有相等的冪; 同理 S 對圓 O_2 和 O_3 也有相等的冪。因此 S 是三個已知圓的等冪心。

因圓 O_1 和 O_2 分別與圓 O 和 O' 相切於點 A、B 和 A'、B', 故直線 AB 與 $A'B'$ 的交點 N 是圓 O_1 和 O_2 的位似中心。同理, BC 與 $B'C'$ 的交點 L 是圓 O_2 和 O_3 的位似中心, AC 與 $A'C'$ 的交點 M 是圓 O_3 和 O_1 的位似中心。根據帕普斯命題2 (達朗貝爾定理), L、M、N 三點必在一條直線上, 直線 LMN 即爲已知三圓的相似軸。

另一方面, 對於圓 O 和 O' 來說, 由於 $NA\cdot NB=NA'\cdot NB'$, 所以點 N 對圓 O 和 O' 有相等的冪, 同理, 點 L 和 M 對圓 O 和 O' 也有相等的冪, 故直線 LMN 也是圓 O 和 O' 的等冪軸。

現在點 B、B' 處作圓 O_2 的切線, 設它們交於 D, 則 $BD=B'D$, 而 BD 和 $B'D$ 同時又是圓 O 和 O' 的切線, 可見點 D 對圓 O 和 O' 有相等的冪, 必位於等冪軸 LMN 上。

但是, 對於圓 O_2 來說, D 是弦 BB' 的極點, 既然 D 在 LMN 上, 則 LMN 的極點 Q 必在 BB' 上, 同理, 對於圓 O_1 和 O_3 來說, LMN 的極點 P 和 R 分別在 AA' 和 CC' 上。

因此熱爾崗得到阿波羅尼斯問題的如下作法:

作三個已知圓 O_1、O_2 和 O_3 的等冪心 S 及外相似軸 XY, 分別求 XY 對於圓 O_1、O_2 和 O_3 的極點 P、Q、R, 連結 SP、SQ、SR 並延長, 與圓 O_1、O_2 和 O_3 分別相交於 A、A'、B、B'、C、C'。分別過點 A、B、C 和 A_1、B_1、C_1 作圓 O 和 O', 則圓 O 和 O' 即爲所求。

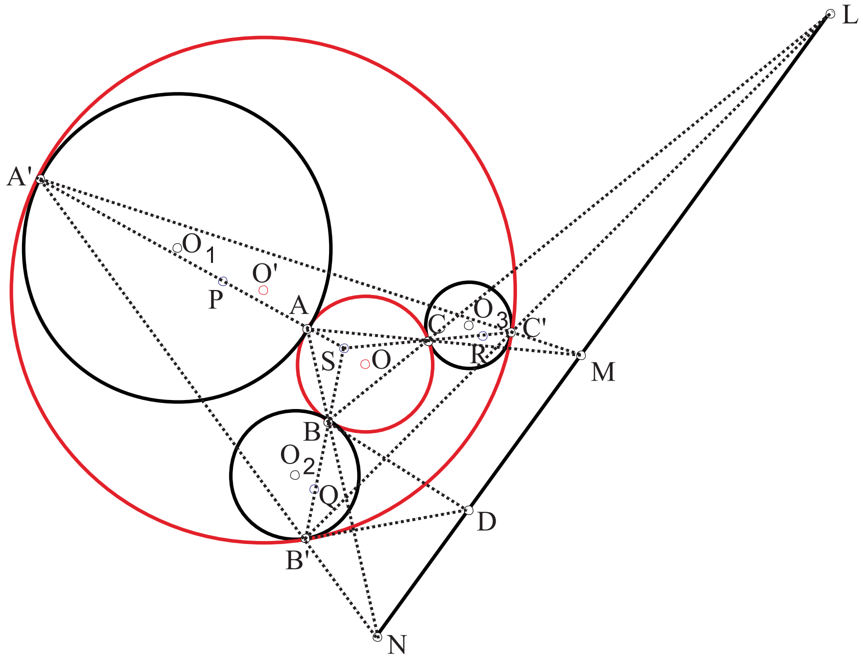

圖 6. 熱爾崗的解法

6. 龐斯列—福切的解法與解的個數

1822年, 龐斯列在其「圖形之射影性質」中給出了阿波羅尼斯問題的另一解法, 他運用的是綜合法, 與上述熱爾崗的解法有異曲同工之妙, 備受時人推崇。

70年後, 法國數學家福切 (Maurice Fouché) 應用等角圓方法再次解決了阿波羅尼斯問題, 不過他的這一解法與龐斯列的解法基本上並無二致。引人注目的是, 福切不僅給出問題的一般解, 而且還根據已知三圓的位置關係討論了各種情況下解的個數, 同時, 他還說明自己的解法同樣適用於已知圓被換成點或直線時的特殊情形。

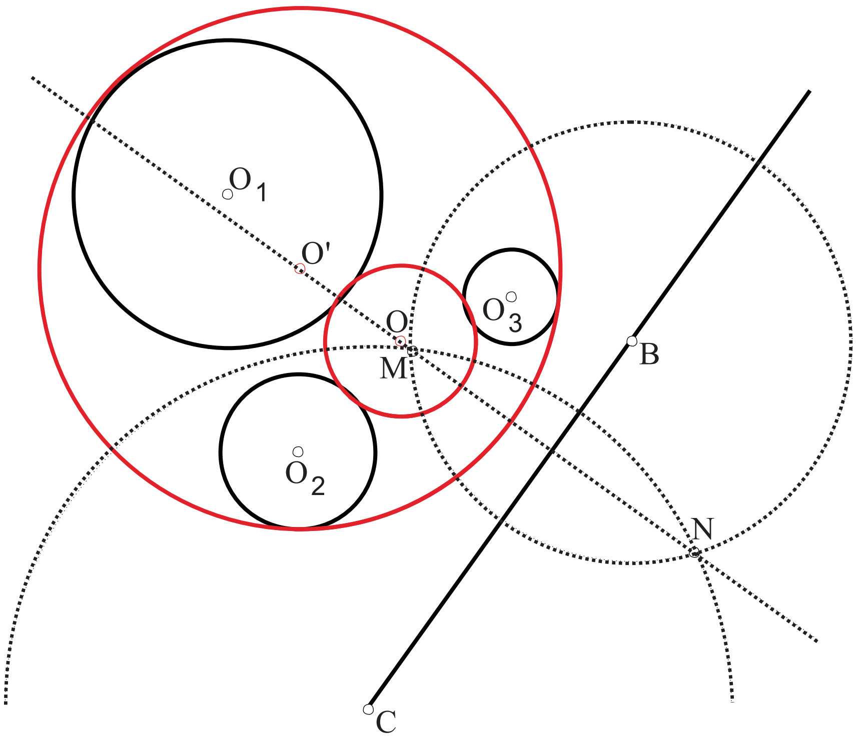

圖7. 龐斯列—福切解法

已知三圓 O_1、O_2 和 O_3, 龐斯列與福切的作法是: 分別作圓 O_1、O_2 和 O_1、O_3 的位似外心 C 和 B, 以 C 爲心, 作圓 O_1、O_2 的共軸圓, 以 B 爲心作圓 O_1、O_3 的共軸圓。記 V 爲圓 B 和 C 所確定的共軸圓系, 於是在與 V 共軛的圓系 W 中與圓 O_1 相切的兩圓 O 和 O' 即爲問題的兩個解。如圖7所示。

福切又證明: 對於三個已知圓來說, 對應於每條相似軸有且只有兩個解, 而一般情況下, 三個已知圓最多有四條相似軸, 因此, 阿波羅尼斯問題最多有8個解。各種情形中解的個數如下:

1. 當已知三圓沒有公共點時:

如果三圓外離或兩圓外離且二者同時位於第三圓內部, 則有8個解, 但是, 若兩圓外離而第三個圓內含於其中一圓則問題無解。

2. 當有兩圓相交時:

(1) 如果第三個圓與以上兩圓都相交但不經過它們的公共點時有8個解。

(2) 如果第三個圓只和前兩圓中的一個相交或者與前兩圓均不相交或者第三圓經過前兩圓的一個交點則有4個解。(後一種情況中包括第四個圓的半徑爲 0 的情況, 亦即三個圓的公共點被看成半徑爲 0 的一個解)

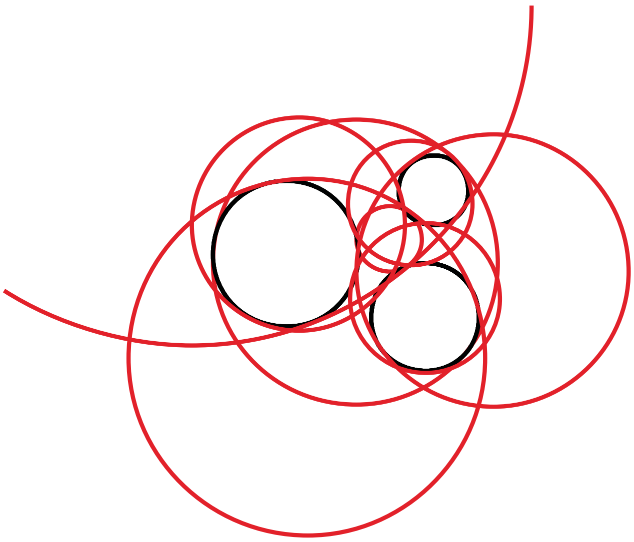

圖 8 三圓外離時阿波羅尼斯問題三所有8個解

(3) 當第三個圓經過前兩圓的兩個公共點時, 除了這兩個公共點被視爲半徑爲零的兩個解外, 沒有其他的解。

3. 當三個圓中有兩個相切時, 下面三種情況有6個解:

(1) 第三個圓與前兩圓均不相交;

(2) 前兩圓外切而第三個圓與前兩圓外離;

(3) 前兩圓內切而第三圓在較大圓的內部且在較小圓的外部。其餘情況均有4個解。

4. 當已知三圓相切于同一點時, 有無窮多個解。

1895年, 英國數學家繆爾海德 (R. F. Muirhead) 在其論文 "阿波羅尼斯相切問題解的個數與性質" 中完整地討論阿波羅尼斯問題的解的個數。

7. 並未結語

19世紀中葉, 丹麥數學家彼得遜 (J. Petersen, 1839∼1910) 利用反演理論解決了阿波羅尼斯問題。就像其他數學難題一樣, 雖然該問題已經得到了圓滿的解決, 但人們對它的興趣卻始終沒有減弱; 隨著幾何學的發展, 一些新的解法不斷地被發現, 並且問題的本身也在被轉化和推廣。就在韋達給出阿波羅尼斯問題的解近一個世紀以後, 費馬 (P. de Fermat, 1601∼1665) 就將該問題推廣到三維空間: 求作一球, 使其與已知的四個球相切。

20世紀, 阿波羅尼斯問題仍然充滿著無窮的魅力。繼笛卡兒和貝克羅夫特之後, 1921 年諾貝爾化學獎獲得者索迪 (F. Soddy, 1877∼1956) 於1936年在國際著名科學雜誌「自然」上用

詩歌形式發表了三圓兩兩相切時的阿波羅尼斯問題的解法, 索迪稱之爲"精確之吻"。對於同一特殊情形, 美國數學家埃普斯坦 (D. Eppstein) 於2001年又從空間兩兩相切四球的一個性質中導出了一個十分美妙解的新法。我們有理由相信, 阿波羅尼斯問題, 這個走過 2200年之旅的古老數學問題, 明天仍將繼續激發數學家們無盡的智慧。

參考文獻

1. T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, London, Oxford University, 1921.
2. F. Cajori, *A History of Mathematics*, New York, Macmillan, 1926.
3. F. Soddy, *The kiss precise*, Nature, 1936, 137, 1021.
4. N. A. Court, *The problem of Apollonius*, Mathematics Teacher, 1961, 54 (10), 444-452.
5. H. Dorrie, 100 *Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solutions*, New York, Dover Publications, 1965, 154-160.
6. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968.
7. H. S. M. Coxeter, *The problem of Apollonius*, American Mathematical Monthly, 1968, 75, 5 -15.
8. D. Eppstein, *Tangent spheres and triangle centers*, American Mathematical Monthly, 2001, 108, 38-49.
9. D. Gisch and J. M. Ribando, *Apollonius' problem: A study of solutions and their connections*, American Journal of Undergraduate Research, 2004, 3 (1), 15-25.
10. 牛頓, 自然哲學之數學原理 (王克迪譯). 西安, 陝西人民出版社, 2004.

—本文作者任教於中國上海華東師大數學系—