數學傳播 30卷2期, pp. 28-39

換個觀點看三角形的四心

劉俊傑

一. 前言

如果將一個三角形的內部, 想像成浩瀚幽冥的夜空, 那麼最爲耀眼明亮, 引人注目的星星群, 應是三角形的重心、內心、外心及垂心, 合稱爲三角形的四心。它們各自具有下列渾然天成的特性, 內心到三邊的距離相等; 外心到三頂點的距離等長; 而重心到三頂點的連線, 會三等分原三角形的面積。

本文將嘗試以有別於一般的角度, 來觀察這四顆心。例如: 重心到三邊的距離比值是多少? 內心到三頂點的距離比值? 以及垂心到三頂點的連線, 會如何切分原三角形的面積? 這些比例式有的相當地簡潔並且可輪換, 頗值得我們一同去認識它們。

爲了便於討論, 文中有些三角形, 將設限爲銳角三角形, 其目的在於避免出現負的比例值。此外, 依照慣例將以 a, b, c 分別代表 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 邊的長度。推論過程中將陸續應用到一些現行高中教材的公式及定理, 如正弦定理、餘弦定理、正弦的三角形面積公式、行列式和克拉瑪公式等, 因此本文很適合推薦給高職、高中的同學們閱讀參考。

本文的內容將分成兩個部份: 首先第一個部份, 將討論垂心及外心到三角形頂點的連線, 分割原三角形面積的比值問題。其次, 在第二個部份則將關於重心、內心等的其他情形, 彙整成四個命題, 並加以證明。最後附上的命題五, 則是有關將三角形的四心坐標化的題材。

二. 本文

第一部份:

公式1: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則

$$\triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH = c^4-a^4+2a^2b^2-b^4 : a^4-b^4+2b^2c^2-c^4 : b^4-a^4+2a^2c^2-c^4$$

證明: (如圖1), 延長 $\overline{AH}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D; 延長 $\overline{BH}$ 交$\overline{CA}$ 於 E。

令 $\overline{BD} = x$; $\overline{DC} = a - x$。

根據畢氏定理 $c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$,

化簡得 $\overline{BD}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$; $\overline{DC}=\dfrac{a^2-c^2+b^2}{2a}$

因此 $\overline{BD}:\overline{DC}=a^2+c^2-b^2:a^2-c^2+b^2$,

$\because \triangle ABH$ 與 $\triangle ACH$ 爲共邊三角形 [1],

所以 $\dfrac{\triangle ABH}{\triangle ACH}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}$。

同理可證 $\dfrac{\triangle ABH}{\triangle BCH}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}$,

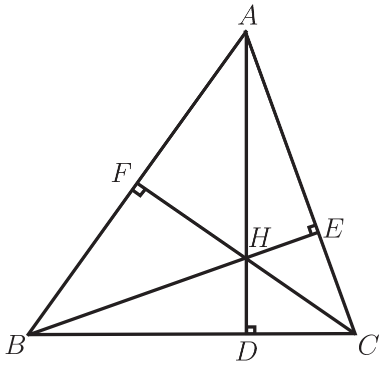

圖 1

綜合上列兩式可得

$$\begin{aligned}&\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH\\&=(c^2)^2-(a^2-b^2)^2:(a^2)^2-(b^2-c^2)^2:(b^2)^2-(a^2-c^2)^2\\&=c^4-a^4+2a^2b^2-b^4:a^4-b^4+2b^2c^2-c^4:b^4-a^4+2a^2c^2-c^4。\end{aligned}$$

證明完畢。

對於公式1的應用, 首先來看一個很直觀的例子。

例1: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH=\triangle BCH=\triangle CAH$, 則 $\triangle ABC$ 爲正三角形。

解: 已知 $\triangle ABH=\triangle BCH$, 運用公式1得到

$$c^4-a^4+2a^2b^2-b^4=a^4-b^4+2b^2c^2-c^4$$

化簡成 $c^4-a^4+b^2(a^2-c^2)=0$, 因式分解爲 $(a+c)(a-c)(b^2-c^2-a^2)=0$, 得到 $a=c$ 或 $b^2=c^2+a^2$ (此解 $\triangle ABC$ 爲直角三角形, 與假設條件不合)。

同理可證 $c=b$; 因此得到 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形。

由上述推論得知: 只有等邊三角形的垂心, 能三等分原三角形。

例2: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且$\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=2:1:1$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=?$

解: 由已知條件 $\triangle BCH=\triangle CAH$,

根據公式1, 得知 $a=b$,

另由已知 $\triangle ABH=2\triangle BCH$,

利用公式1, 得到

$c^4-a^4+2a^2b^2-b^4=2(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)$

將 $a=b$ 代入上式, 有 $4a^2=3c^2$,
所以 $a:c=\sqrt{3}:2$,
因此 $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{3}:2$。(如圖2)

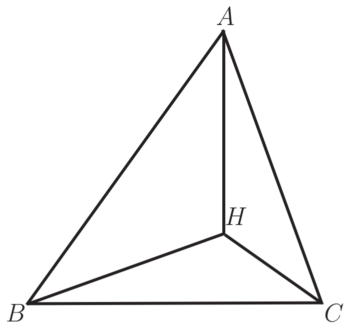

圖 2

接下來的是本文的一個主要題目, 是我很喜歡的一個例題。

例3: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=?$

解:
步驟1: 由已知 $2\triangle ABH=\triangle BCH$, 利用公式1, 得到

$$2(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)=a^4-b^4+2b^2c^2-c^4$$

化簡爲 $3a^4+b^4-3c^4+2b^2c^2-4a^2b^2=0$,
再由已知 $2\triangle CAH=3\triangle BCH$,
運用公式1, 得到

$$2(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)=3(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)$$

化簡爲 $5a^4-5b^4-c^4+6b^2c^2-4a^2c^2=0$,

步驟2:從上述推論得知: a,b,c 必須滿足下列的聯立方程式

$$\begin{cases}3a^4+b^4-3c^4+2b^2c^2-4a^2b^2=0\\5a^4-5b^4-c^4+6b^2c^2-4a^2c^2=0\end{cases}$$

在不失一般性的情形下, 令 c 值爲1, 可將上式化簡爲

$$\begin{cases}3a^4+b^4-3+2b^2-4a^2b^2=0\\5a^4-5b^4-1+6b^2-4a^2=0\end{cases}$$

再令 $x=a^2$, $y=b^2$, 即可簡化成二元二次聯立方程式 [2]

$$\begin{cases}3x^2-4xy+y^2+2y-3=0..........(1)\\5x^2-5y^2-4x+6y-1=0..........(2)\end{cases}$$

由 (2)-k(1)$\Rightarrow$

$(5-3k)x^2+2(2k)xy+(-5-k)y^2+2(-2)x+2(3-k)y+(3k-1)=0$..........(3)

(3) 式可分解爲兩個一次因式的乘積的充分必要條件爲

$$\begin{vmatrix} 5-3k & 2k & -2 \\ 2k & -5-k & 3-k \\ -2 & 3-k & 3k-1 \end{vmatrix}=0$$

運算得 $k=0$ 或 $k=3$,

$k=0$ 代入 (3) 式, 會得到 (2) 式。

$k=3$ 代入 (3) 式, 會得到

$$-4x^2+12xy-8y^2-4x+8=0$$

可分解成 $(x-y-1)(x-2y+2)=0$,

步驟3:首先解

$\begin{cases} x-y-1=0 \\ 5x^2-5y^2-4x+6y-1=0 \end{cases}$

得 $x=1$, $y=0$; 因此 $a=1$, $b=0$(不合)。

其次解 $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 5x^2-5y^2-4x+6y-1=0 \end{cases}$

可得到兩組解:

解一: $x=0$, $y=1$; 因此 $a=0$, $b=1$(不合)。

解二: $x=\dfrac{8}{5}$, $y=\dfrac{9}{5}$;

因此 $a=\sqrt{\dfrac{8}{5}}$, $b=\sqrt{\dfrac{9}{5}}$,

即可得知 $a:b:c=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}$。(如圖3)

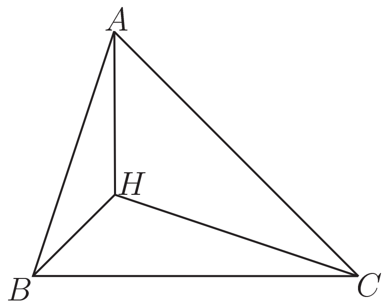

圖 3

請讀者留心, 根據上述推論得知:$\triangle ABC$ 的垂心到三頂點的連線, 能將原三角形巧分成面積比 $1:2:3$ 的三角形, 僅僅只有各位眼前的這一個。此圖形看似簡單, 其背後卻有著許多的公式、定理及計算組合而成的。

公式2: 設 O 爲銳角 $\triangle ABC$ 的外心, 則

$$\triangle ABO:\triangle BCO:\triangle CAO=a^2c^2+b^2c^2-c^4:a^2b^2+a^2c^2-a^4:a^2b^2+b^2c^2-b^4$$

證明: (如圖4) 首先, 設 R 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑, 並先由正弦定理得到個引理

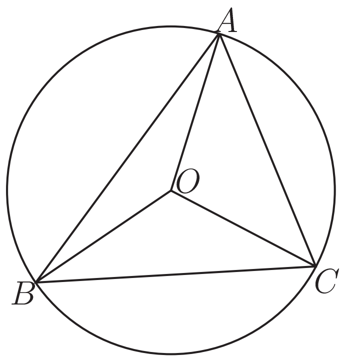

圖 4

$$\sin C : \sin A : \sin B = c : a : b = \frac{1}{ab} : \frac{1}{bc} : \frac{1}{ca}$$

$$\begin{aligned}
&\triangle ABO : \triangle BCO : \triangle CAO \\
&= \frac{1}{2}R^2 \sin\angle AOB : \frac{1}{2}R^2 \sin\angle BOC : \frac{1}{2}R^2 \sin\angle COA \quad \text{(三角形面積公式)} \\
&= \sin 2C : \sin 2A : \sin 2B \quad \text{(圓周角定理)} \\
&= 2\sin C\cos C : 2\sin A\cos A : 2\sin B\cos B \quad \text{(二倍角公式)} \\
&= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\sin C : \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\sin A : \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\sin B \quad \text{(餘弦定理)} \\
&= \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2b^2} : \frac{b^2+c^2-a^2}{b^2c^2} : \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2c^2} \quad \text{(引理) [3]} \\
&= a^2c^2+b^2c^2-c^4 : a^2b^2+a^2c^2-a^4 : a^2b^2+b^2c^2-b^4
\end{aligned}$$

證明完畢。

例4: 設 O 爲銳角 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\triangle ABO : \triangle BCO : \triangle CAO = 2:1:1$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=$?

解: 由已知條件 $\triangle BCO = \triangle CAO$, 依據公式2

$$a^2b^2+a^2c^2-a^4 = a^2b^2+b^2c^2-b^4$$

此即 $a=b$,
再由已知 $\triangle ABO = 2\triangle BCO$,
得 $a^2c^2+b^2c^2-c^4 = 2a^2b^2+2a^2c^2-2a^4$,
將 $a=b$ 代入化簡, 結果爲 $c=0$,
此結果告訴我們: 不存在 $\triangle ABC$, 滿足例4的條件!

另解: (我嘗試以三角函數來驗證相同的結論)
證明:

(1) 從已知 $\triangle BCO = \triangle CAO \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}R^2\sin\angle AOC = \frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC \;\Rightarrow\; \angle A = \angle B$,
因此 $2\angle A = \pi - \angle C$。

(2) 由已知

$$\begin{aligned}\triangle ABO = 2\triangle BCO &\Rightarrow \frac{1}{2}R^2\sin 2C = 2\left[\frac{1}{2}R^2\sin 2A\right]\\ &\Rightarrow \sin 2C = 2\sin 2A\\ &\Rightarrow 2\sin C\cos C = 2\sin(\pi - c)\\ &\Rightarrow \sin C\cos C = \sin C\\ &\Rightarrow \sin C(\cos C - 1) = 0\\ &\Rightarrow \sin C = 0 \ \vee \ \ \cos C = 1\\ &\Rightarrow \angle C = 0 \ \vee \ \angle C = \pi\end{aligned}$$

此結果也顯示 $\angle C$ 無解, 所以 $\triangle ABC$ 並不存在。當 $\angle C = 0$ 的情形, 或許可以想像成, 頂點 C 是落在無窮遠處的極限情形。

第二部份:

命題1: 設 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $\overline{GD}$, $\overline{GE}$, $\overline{GF}$ 分別垂直 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, 則:

(1) $\triangle ABG : \triangle BCG : \triangle CAG = 1:1:1$。

(2) $\overline{AG} : \overline{BG} : \overline{CG} = \sqrt{2b^2+2c^2-a^2} : \sqrt{2c^2+2a^2-b^2} : \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

(3) $\overline{GD} : \overline{GE} : \overline{GF} = bc : ca : ab$ (如圖5)

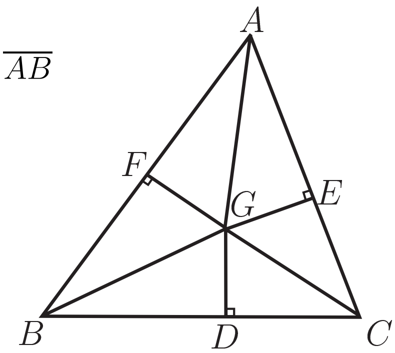

圖 5

證明: (2)設 m_a, m_b, m_c 分別爲 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 邊上的中線長度, 根據中線長公式 [4], 得到

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{a^2}{2})};$$
$$m_b = \sqrt{\frac{1}{2}(c^2+a^2-\frac{b^2}{2})};$$
$$m_c = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-\frac{c^2}{2})}。$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{AG} : \overline{BG} : \overline{CG} &= \frac{2}{3}m_a : \frac{2}{3}m_b : \frac{2}{3}m_c\\ &= \sqrt{b^2+c^2-\frac{a^2}{2}} : \sqrt{c^2+a^2-\frac{b^2}{2}} : \sqrt{a^2+b^2-\frac{c^2}{2}}\\ &= \sqrt{2b^2+2c^2-a^2} : \sqrt{2c^2+2a^2-b^2} : \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\end{aligned}$$

(3) 因爲 $\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle CAG$,

知 $\frac{1}{2}a\cdot\overline{GD}=\frac{1}{2}b\cdot\overline{GE}=\frac{1}{2}c\cdot\overline{GF}$,

即可得證 $\overline{GD}:\overline{GE}:\overline{GF}=bc:ca:ab$。

命題2: 設 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心, 且 $\overline{ID}$, $\overline{IE}$, $\overline{IF}$ 分別垂直 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, 則:

(1) $\triangle ABI:\triangle BCI:\triangle CAI=c:a:b$。

(2) $\overline{AI}:\overline{BI}:\overline{CI}=$

$\sqrt{bc(b+c-a)}:\sqrt{ca(c+a-b)}:\sqrt{ab(a+b-c)}$

(3) $\overline{ID}:\overline{IE}:\overline{IF}=1:1:1$ (如圖6)

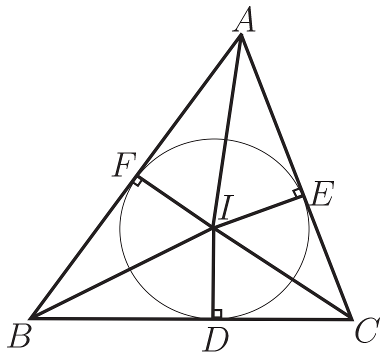

圖 6

證明: (2) 延長 $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ 分別交 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 於點 P, Q, R。(如圖7)

由 Menelaus 定理, 知

$\dfrac{\overline{IA}}{\overline{PI}}\cdot\dfrac{\overline{QC}}{\overline{AQ}}\cdot\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CB}}=1$

利用角平分線定理, 此即 $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{PI}}\cdot\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{b+c}=1$,

化簡得 $\overline{IA}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overline{AP}$,

同理可知 $\overline{IB}=\dfrac{a+c}{a+b+c}\overline{BQ}$;

$\overline{IC}=\dfrac{a+b}{a+b+c}\overline{CR}$

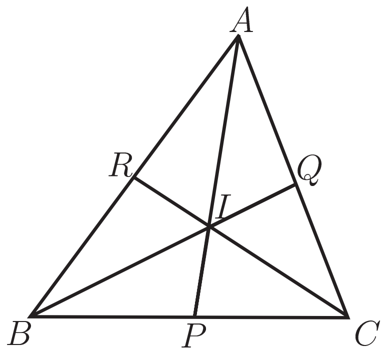

圖 7

依據角平分線長公式 [4],

$$\overline{AP}=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c};$$
$$\overline{BQ}=\frac{\sqrt{ca(a+b+c)(a+c-b)}}{a+c};$$
$$\overline{CR}=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}。$$

代入前面 $\overline{IA}$, $\overline{IB}$, $\overline{IC}$, 得到

$$\overline{AI}=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{a+b+c};$$
$$\overline{BI}=\frac{\sqrt{ca(a+b+c)(a+c-b)}}{a+b+c};$$
$$\overline{CI}=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b+c}。$$

得證

$$\overline{AI}:\overline{BI}:\overline{CI}=\sqrt{bc(b+c-a)}:\sqrt{ca(c+a-b)}:\sqrt{ab(a+b-c)}$$

可看出此公式甚爲簡潔有規律且可輪換。

命題3: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\overline{HD}$, $\overline{HE}$, $\overline{HF}$ 分別垂直 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, 則:

(1) $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH$
$=c^4-a^4+2a^2b^2-b^4:a^4-b^4+2b^2c^2-c^4$
$:b^4-a^4+2a^2c^2-c^4$

(2) $\overline{HD}:\overline{HE}:\overline{HF}$
$=bc(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):ca(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)$
$:ab(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)$

(3) $\overline{AH}:\overline{BH}:\overline{CH}$
$=a(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)$
$:b(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)$
$:c(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)$ (如圖8)

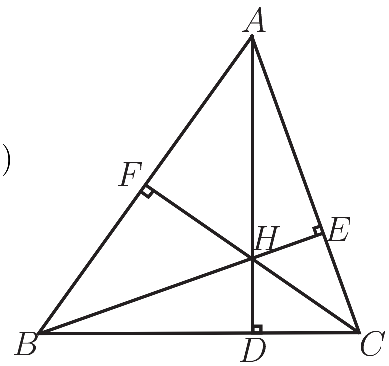

圖 8

證明: (1) 此結果即爲之前討論過的公式1。

(2) 因爲 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=\frac{1}{2}c\cdot\overline{HF}:\frac{1}{2}a\cdot\overline{HD}:\frac{1}{2}b\cdot\overline{HE}$,
且$\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=c^4-a^4+2a^2b^2-b^4:a^4-b^4+2b^2c^2-c^4:b^4-a^4+2a^2c^2-c^4$,
比較上列兩式, 可知

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HD}}=\frac{a(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)}{c(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)} \text{ 及 } \frac{\overline{HF}}{\overline{HE}}=\frac{b(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)}{c(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)}$$

對分子擴分, 即可得證

$$\overline{HD}:\overline{HE}:\overline{HF}=bc(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):ca(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4):ab(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)$$

(3) 已知 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心,

有 $\triangle AHE \sim \triangle BHD \Rightarrow \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{HE}}{\overline{HD}}$,

且 $\triangle AHF \sim \triangle CHD \Rightarrow \dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{HF}}{\overline{HD}}$,

比較上列兩式, 可知

$$\overline{AH} : \overline{BH} : \overline{CH} = \overline{HE} \cdot \overline{HF} : \overline{HD} \cdot \overline{HF} : \overline{HE} \cdot \overline{HD}$$

應用上述 (2) 的結果, 得到

$$\begin{aligned}\overline{AH} : \overline{BH} : \overline{CH} = & a(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)\\ & : b(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)\\ & : c(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)(b^4-a^4+2a^2c^2-c^4)。\end{aligned}$$

命題4: 設 O 爲銳角 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ 分別垂直 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, 則:

(1) $\triangle ABO : \triangle BCO : \triangle CAO = a^2c^2+b^2c^2-c^4$
$: a^2b^2+a^2c^2-a^4 : a^2b^2+b^2c^2-b^4$。

(2) $\overline{AO} : \overline{BO} : \overline{CO} = 1:1:1$。

(3) $\overline{OD} : \overline{OE} : \overline{OF} = ab^2+ac^2-a^3$
$: bc^2+ba^2-b^3 : ca^2+cb^2-c^3$。(如圖9)

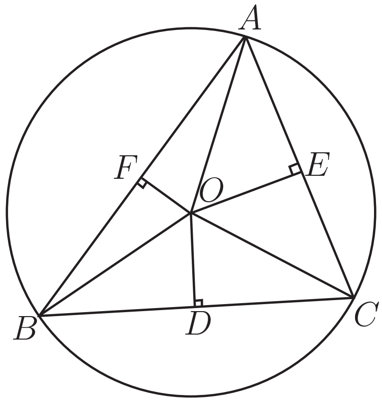

圖 9

證明: (1) 此結果即爲之前證明過的公式2。

(3) 因爲

$$\triangle ABO : \triangle BCO : \triangle CAO = \frac{1}{2}c \cdot \overline{OF} : \frac{1}{2}a \cdot \overline{OD} : \frac{1}{2}b \cdot \overline{OE}$$

且

$$\triangle ABO : \triangle BCO : \triangle CAO = a^2c^2+b^2c^2-c^4 : a^2b^2+a^2c^2-a^4 : a^2b^2+b^2c^2-b^4$$

綜合上列兩式, 得到

$$\overline{OD} : \overline{OE} : \overline{OF} = ab^2+ac^2-a^3 : bc^2+ba^2-b^3 : ca^2+cb^2-c^3。$$

命題5: 在直角坐標平面上, $\triangle ABC$ 中, 設 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 且 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心; I 爲其內心, O 爲其外心, H 爲其垂心, 則:

(1) G點坐標爲 $\left[\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$

(2) I點坐標爲 $\left[\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right]$

(3) O點坐標爲 $$\left[\frac{\begin{vmatrix} x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2 & y_1-y_2 \\ x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2 \\ x_2-x_3 & x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}\right]$$

(4) H 點坐標爲
$$\left[\frac{\begin{vmatrix} x_1x_3-x_2x_3+y_1y_3-y_2y_3 & y_1-y_2 \\ x_1x_2-x_1x_3+y_1y_2-y_1y_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1x_3-x_2x_3+y_1y_3-y_2y_3 \\ x_2-x_3 & x_1x_2-x_1x_3+y_1y_2-y_1y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}\right]$$

證明: (2)(如圖10) 設 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ 爲角平分線,
由角平分線定理, 知 $\overline{BD}:\overline{DC}=c:b$
代入分點坐標公式, 得 D 點坐標爲
$\left[\dfrac{bx_2+cx_3}{b+c}, \dfrac{by_2+cy_3}{b+c}\right]$
如同命題2-(2) 的證明過程,
應用 Menelaus 定理可得
$\overline{DI}:\overline{IA}=a:b+c$

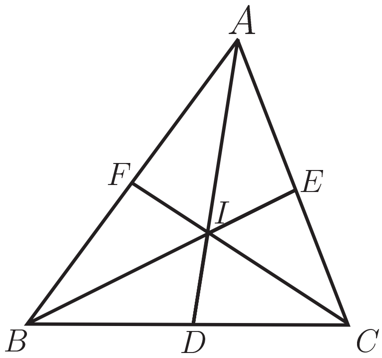

圖 10

再運用分點公式即可得到內心坐標
$I=\left[\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right]$
此公式也甚爲簡潔有規律。

(3)(如圖11) 設 $P(x,y)$ 爲中垂線 $\overline{OF}$ 上一點,
$\because (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$
化簡得 $\overline{OF}$ 的方程式爲:
$2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y=x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2$
同理可得 $\overline{OD}$ 的方程式爲:

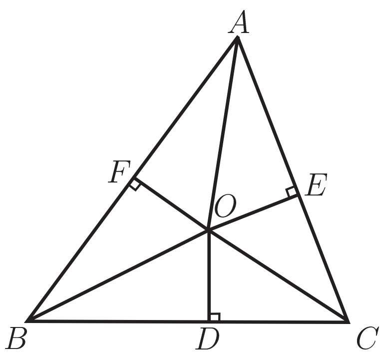

圖 11

$2(x_2-x_3)x+2(y_2-y_3)y=x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2$

根據克拉瑪公式得 $\overline{OF}$ 與 $\overline{OD}$ 的交點, 外心 O 點坐標為

$$\left[\frac{\begin{vmatrix} x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2 & y_1-y_2 \\ x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2 \\ x_2-x_3 & x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}\right]$$

(4)(如圖12) $\because m_{\overline{AB}}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \Rightarrow m_{\overline{CF}}=-\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}$

由點斜式可知, $\overline{AB}$ 邊上的高 $\overline{CF}$ 的方程式

$(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y=x_1x_3-x_2x_3+y_1y_3-y_2y_3$

同理可得, $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}$ 的方程式

$(x_2-x_3)x+(y_2-y_3)y=x_1x_2-x_1x_3+y_1y_2-y_1y_3$

依據克拉瑪公式得 $\overline{CF}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, 垂心 H 點坐標為

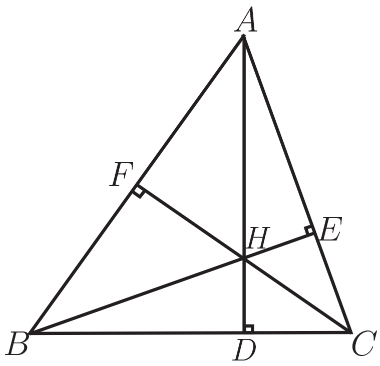

圖 12

$$\left[\frac{\begin{vmatrix} x_1x_3-x_2x_3+y_1y_3-y_2y_3 & y_1-y_2 \\ x_1x_2-x_1x_3+y_1y_2-y_1y_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1x_3-x_2x_3+y_1y_3-y_2y_3 \\ x_2-x_3 & x_1x_2-x_1x_3+y_1y_2-y_1y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}}\right]$$

證明完畢。

三. 結語

顯然的, 本文第二個部份的前四個命題中的許多公式, 都可以像第一個部份的例題二及例題三一樣, 討論在特定比例值的條件下, 求原三角形的邊長比例, 由於篇幅有限且解法大致相同, 就請有興趣的讀者們可以試試看, 在此就不加以贅述。

筆者在高職任教數學科, 轉眼間已有十數年的歲月。期間經常在課堂上, 向同學們介紹正弦定理、餘弦定理及克拉瑪等公式的性質及練習題。今日能將它們應用到平面幾何的題目中, 才眞正的感受到, 它們眞不愧是解三角形題目的利器。

本文中第一個部份, 關於垂心和外心的討論均設限於銳角三角形, 能否將類似的公式, 推廣到鈍角三角形, 則尚有待日後的繼續努力。

參考文獻

1. 張景中, 平面幾何新路, 九章出版社, 1995年7月, p.62。
2. 左銓如, 季素月, 朱家生, 陳鼎, 初等代數研究, 九章出版社, 1998年4月, p.157-159。
3. 孫文先, 三角, 九章出版社, 1985年10月, p.68, 127, 128, 150。
4. 世部貞市郎, 幾何學辭典, 九章出版社, 1998年11月, p.943。

—本文作者任教於國立西螺高級農工職業學校—