數學傳播 30卷1期, pp. 45-48

圓錐曲線的光學性質

張海潮 · 王靖雅 · 洪碧霞

在好幾個高中教科書的版本裡處理圓錐曲線的光學性質時, 都是先求切線, 學生要經過許多的代數運算, 算出切線的直線方程式, 再利用餘弦或兩條線夾角來證明圓錐曲線的光學性質。

現在我們的辦法是直接用幾何圖形的方式, 不用經過很多的代數運算, 就可以直接從圖形看出來。

壹. 橢圓光學性質的證明:

一. $\boxed{\text{作圖}}$:

(1) 作一半徑爲 $2a$ 的圓, 令其圓心爲 O。

(2) 半徑上取一定點 P, 在圓上任取一點 R, 連接 $\overline{RP}$。

(3) 作 $\overline{RP}$ 的中垂線 l, l 交 $\overline{RP}$ 於 M 點, 交 $\overleftrightarrow{OR}$ 於 Q 點, 則 $\overline{QP}=\overline{QR}$, 因此 $\overline{QO}+\overline{QP}=\overline{QO}+\overline{QR}=\overline{OR}=2a$。

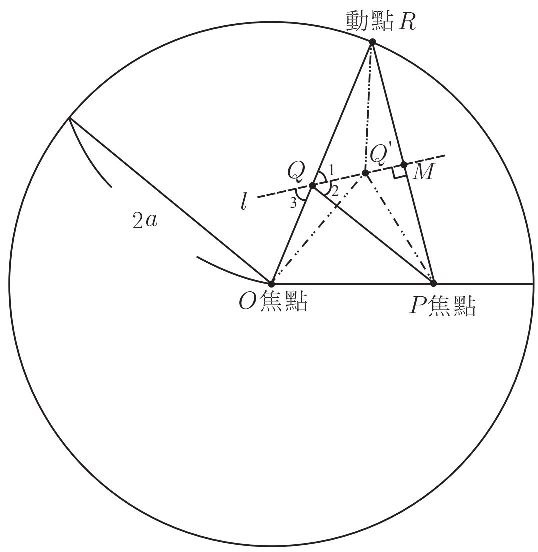
(4) 因 R 爲圓上一動點, 所以由 R 決定出的 Q 點所形成的軌跡皆會滿足 $\overline{QO}+\overline{QP}=2a$。因此所作出的圖形爲橢圓, 且焦點爲 O、P 兩點。

二. $\boxed{\text{證明}}$: l 爲過此橢圓上 Q 點的切線。

想法 :要證明 l 爲橢圓上 Q 點的切線, 只要證明 l 只通過橢圓上唯一一點 Q。假設 l 交此橢圓於 Q、Q' 兩點, 則 $\overline{Q'P}=\overline{Q'R}$ (l 爲 $\overline{PR}$ 的中垂線), 所以 $\overline{Q'O}+\overline{Q'P}=\overline{Q'O}+\overline{Q'R}>\overline{OR}=2a$ (兩邊和大於第三邊), 與假設矛盾。所以 Q' 不可能在橢圓上, 故 l 爲過 Q 點的切線。

三. $\boxed{\text{證明橢圓的光學性質}}$:

因爲 $\angle 1=\angle 3$ (對頂角), $\angle 1=\angle 2$, 所以 $\angle 2=\angle 3$, 得證。



貳. 拋物線光學性質的證明:

一. $\boxed{\text{作圖}}$:

(1) 給定一直線 L 及一定點 P ($P \notin L$)。

(2) 在 L 上任取一點 R, 過 R 作一垂直 L 的射線 $\overleftrightarrow{RO}$, 連接 $\overline{RP}$。

(3) 作 $\overline{RP}$ 的中垂線 l, l 交 $\overline{RP}$ 於 M, 交 $\overleftrightarrow{RO}$ 於 Q, 則 $\overline{RQ} = \overline{QP}$。

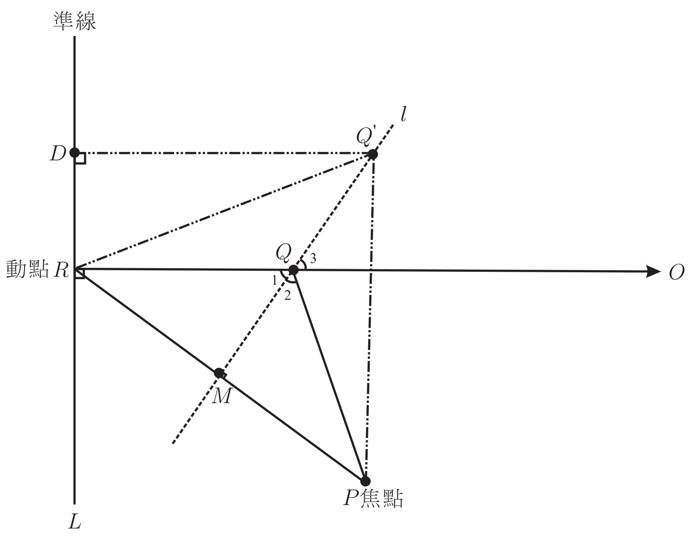
(4) 因為 R 為一動點, 所以由 R 決定出的 Q 點所形成的軌跡皆會滿足 $\overline{RQ} = \overline{QP}$。因此所作出的圖確實為一拋物線, 且 P 為此拋物線的焦點, L 為其準線。

二. $\boxed{\text{證明}}$: l 為過此拋物線上 Q 點的切線。

想法 :要證明 l 為橢圓上 Q 點的切線, 只要證明 l 只通過拋物線上唯一一點 Q。假設 l 交此拋物線於 Q、Q' 兩點, 過 Q' 作一垂直線交 L 於 D 點。因為 $\overline{Q'P} = \overline{Q'R} > \overline{Q'D}$ (直角三角形斜邊大於兩股), 與假設矛盾, 所以 Q' 不可能在拋物線上, 故 l 為過 Q 點的切線。

三. $\boxed{\text{證明拋物線的光學性質}}$:

因為 $\angle 1 = \angle 3$ (對頂角), $\angle 1 = \angle 2$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$, 得證。



參. 雙曲線光學性質的證明:

一. 作圖 :

(1) 作一半徑爲 $2a$ 的圓, 令其圓心爲O。

(2) 在右半圓外取一定點 P, 右半圓上任取一點 R 使得 $\overline{OR}$ 不垂直於 $\overline{RP}$。

(3) 作 $\overline{RP}$ 的中垂線 l, l 交 $\overline{RP}$ 於 M, 交 $\overleftrightarrow{OR}$ 於 Q, 則 $\overline{QP}=\overline{QR}$, 因此 $\overline{OQ}-\overline{QP}=\overline{OQ}-\overline{QR}=2a$。

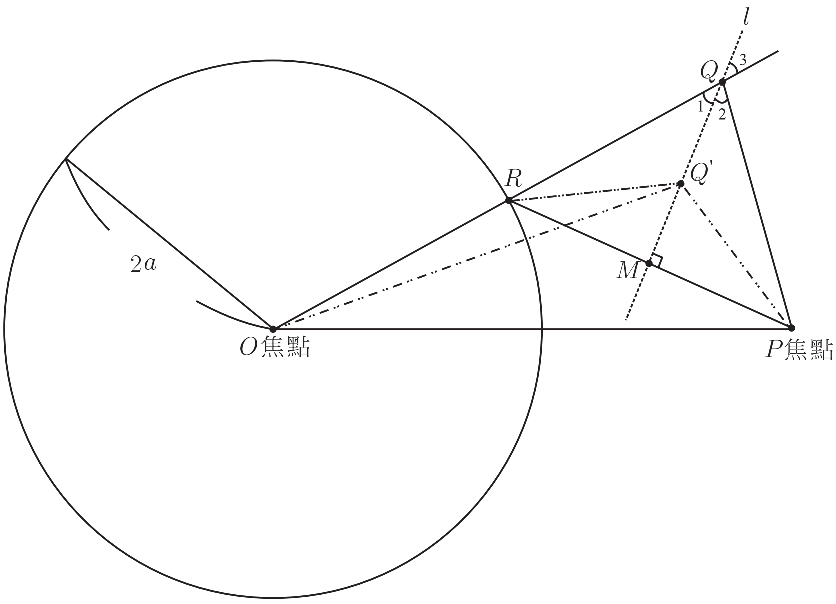
(4) 因 R 爲一動點, 所以由 R 決定出的 Q 點所形成的軌跡皆會滿足 $\overline{OQ}-\overline{OR}=2a$。因此所作出的圖形爲雙曲線的右半支, 且焦點爲 O、P 兩點; 同理以 P 爲圓心, 作一半徑爲 $2a$ 的圓, 取 O 爲圓外一點, 以同法可作出雙曲線的左半支。

二. 證明 : l 爲過此雙曲線上 Q 點的切線。

想法 :要證明 l 爲橢圓上 Q 點的切線, 只要證明 l 只通過雙曲線上唯一一點 Q。假設 l 交此雙曲線於 Q、Q' 兩點, 則 $\overline{Q'P}=\overline{Q'R}$, 所以 $\overline{OQ'}-\overline{Q'P}=\overline{OQ'}-\overline{Q'R}<\overline{OR}=2a$。(兩邊差小於第三邊), 與假設矛盾, 所以 Q' 不可能在雙曲線上, 故 l 爲過 Q 點的切線。

三. 證明雙曲線的光學性質 :

因爲 $\angle 1=\angle 3$ (對頂角), $\angle 1=\angle 2$, 所以 $\angle 2=\angle 3$, 得證。



—本文作者張海潮爲台大數學系退休教授, 王靖雅爲師大附中實習老師, 洪碧霞爲中山女高實習老師—