數學傳播 30卷1期, pp. 40-44

94 數學 (甲)指考中的拋物線

劉紹正

九十四學年度的指考數學 (甲) 出了一題有關拋物線的題目, 有值得探討的地方, 其題目爲:

有一條拋物線位於坐標平面之上半面 (即其 y 坐標 ≥ 0), 並與 x-軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切。下列敘述何者正確?

(1) 此拋物線的對稱軸必爲 y-軸。

(2) 若此拋物線的對稱軸爲 y-軸, 則其焦距爲 1。(註: 拋物線的焦距爲焦點到頂點的距離)

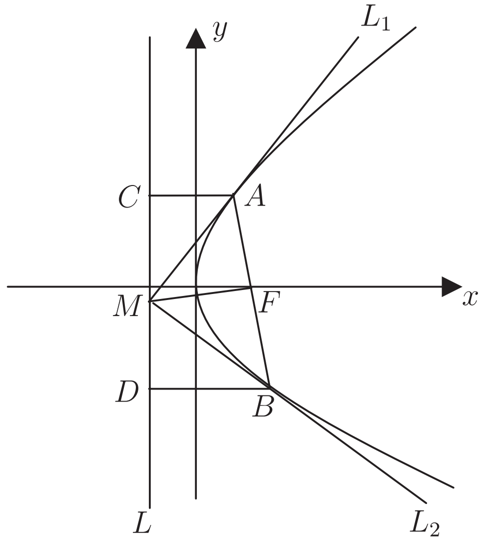
(3) 此拋物線的頂點必在 x-軸上。

(4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

先引進兩個性質、三個引理:

性質一: 過拋物線準線上一點, 作此拋物線的兩切線必互相垂直。反之亦成立, 即拋物線互相垂直的兩切線其交點的軌跡即爲準線。

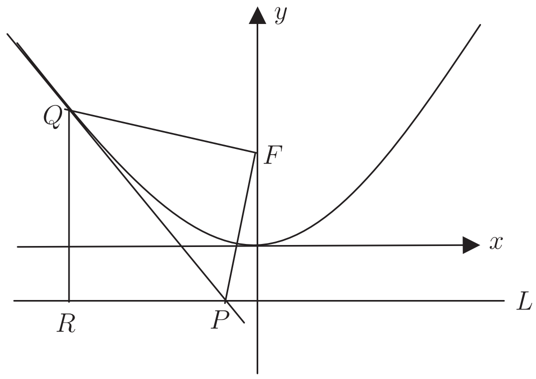
證明: 設 M 爲準線 L 上任一點, 直線 L_1、L_2 均爲過 M 的切線,
其切點分別爲 A、B, 且 F 爲拋物線的焦點。(如右圖)
過 A 作 $\overline{AC}\perp L$, 過 B作 $\overline{BD}\perp L$,
由光學性質得 $\angle CAM=\angle FAM$, 又 $\overline{AC}=\overline{AF}$,
則 $\Delta CAM\cong\Delta FAM$, 故 $\angle CMA=\angle FMA$。
同理, $\angle FMB=\angle DMB$, 則 $\angle AMB$ 爲直角。



反之, 設兩互相垂直的切線 L_1、L_2 其垂足爲 M,
過 A 作 $\overline{AC}\perp L$, 過 B 作 $\overline{BD}\perp L$, 作 $\overline{CM}$, $\overline{DM}$,
由光學性質得 $\angle CAM=\angle FAM$, 又 $\overline{AC}=\overline{AF}$,
則 $\Delta CAM\cong\Delta FAM$, 故 $\angle CMA=\angle FMA$。
同理, $\angle FMB=\angle DMB$,
則 $\angle CMA+\angle AMF+\angle FMB+\angle DMB$
$=2\angle AMB=2\times 90^\circ=180^\circ$,
故 M 在準線 L 上。

性質二: 過準線上一點 P 之切線與準線的夾角等於切線與 $\overleftrightarrow{PF}$ 之夾角。(如右圖)

證明: 如圖, 設 P 爲準線 L 上一點, F 爲焦點, Q 爲切點, $\overline{QR} \perp L$,
由光學性質得知, $\angle FQP = \angle RQP$,
由拋物線的定義得 $\overline{QF} = \overline{QR}$,
則 $\Delta FQP \cong \Delta RQP$,
故 $\angle FPQ = \angle RPQ$。



引理一: 已知不垂直且交於一點的兩直線 L_1、L_2, 則存在無限多個拋物線以 L_1 爲準線並與 L_2 相切。依性質二作圖如下:

作圖:

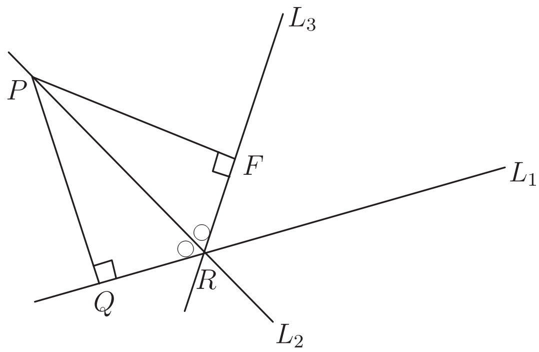
步驟一: 作直線 L_1、L_2, 使此兩直線不垂直且交於一點 R。(如右圖)

步驟二: 過 R 作直線 L_3, 使 L_3 與 L_2 的夾角等於 L_1 與 L_2 的夾角, 且 L_3 介於 L_1 與 L_2 之間。

步驟三: 在 L_3 上任取異於 R 的一點 F, 作爲焦點。

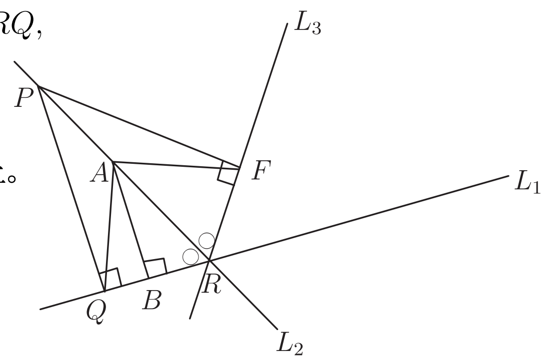
步驟四: 從 F 作 L_3 的垂線交 L_2 於 P。

步驟五: 從 P 作 L_1 的垂線, 垂足爲 Q。



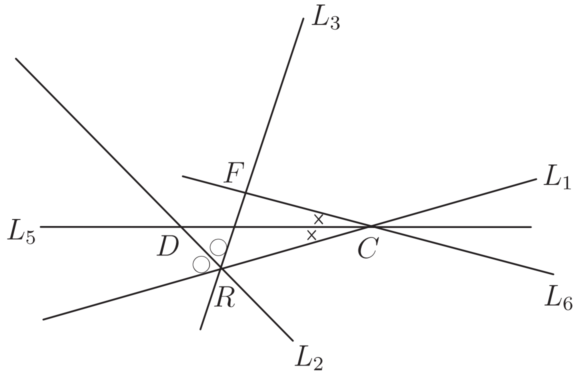
接著證明以 F 爲焦點, L_1 爲準線的拋物線與 L_2 相切於 P。

證明: $\angle PFR = \angle PQR$, $\angle PRF = \angle PRQ$,
(如右圖) $\overline{PR} = \overline{PR}$,
則 $\Delta PFR \cong \Delta PQR \Rightarrow \overline{PF} = \overline{PQ}$。
即 P 在以 F 爲焦點, L_1 爲準線的拋物線 Γ 上。
設 A 爲 L_2 上異於 P 的點, 作 $\overline{AB} \perp L_1$,
因 $\Delta PFR \cong \Delta PQR \Rightarrow \overline{RF} = \overline{RQ}$,
則 $\Delta AFR \cong \Delta AQR \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AQ}$,
又 $\overline{AF} = \overline{AQ} > \overline{AB}$,
故 A 不在拋物線上, 即 L_2 爲此拋物線的切線。因 F 爲 L_3 上異於 R 的任一點, 故存在無限多個拋物線以 L_1 爲準線並與 L_2 相切。



引理二: 過 R 作直線 L_4 使 L_4 垂直 L_2, 則由性質一可知 L_4 亦爲拋物線 Γ 的切線。

引理三: 直線 L_5 不垂直 L_1, 且不平行亦不垂直 L_2, 則存在唯一的拋物線以 L_1 爲準線並與 L_2、L_5 均相切。



作圖:

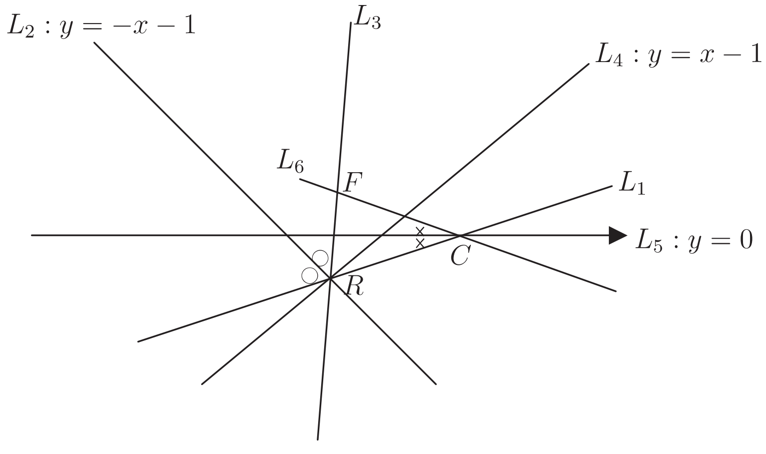
步驟一: 作直線 L_5 不垂直 L_1, 且不平行亦不垂直 L_2, 並交 L_1 於 C、交 L_2 於D。(如右圖)

步驟二: 過 C 作直線 L_6, 使 L_6 與 L_5 的夾角等於 L_5 與 L_1 的夾角, 且 L_6 介於 L_1 與 L_5 之間。

證明: 因 L_5 不平行 L_2, 則 $\angle FRD \neq \angle FCD$, 故 L_3 不平行 L_6, 可知 L_6 與 L_3 恰交於一點, 設其爲 F。由引理一可知, 存在以 F 爲焦點, L_1 爲準線的拋物線並與 L_2、L_5 均相切。因 F 點唯一確定, 故拋物線唯一確定。

定理: 存在無限多條拋物線位於坐標平面之上半面 (即其 y 坐標≥ 0), 並與 x-軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切。

證明: 於上述引理中, 取 L_2 表直線 $y=-x-1$, L_4 表直線 $y=x-1$, L_5 表 x 軸, L_2 與 L_4 交於點 $R(-1,0)$, L_1 表過 R 且斜率在-1, 1之間的任一直線, L_6 與 L_3 交於點 F。(如下圖) 因 $L_2 \perp L_4$, 由引理二可知, L_2 與 L_4 均爲以 F 爲焦點, L_1 爲準線之拋物線的切線。由引理三可知, L_5 亦爲拋物線的切線。因滿足過 R 且斜率在-1, 1之間的準線 L_1 有無限多條, 故存在無限多條拋物線滿足題意。

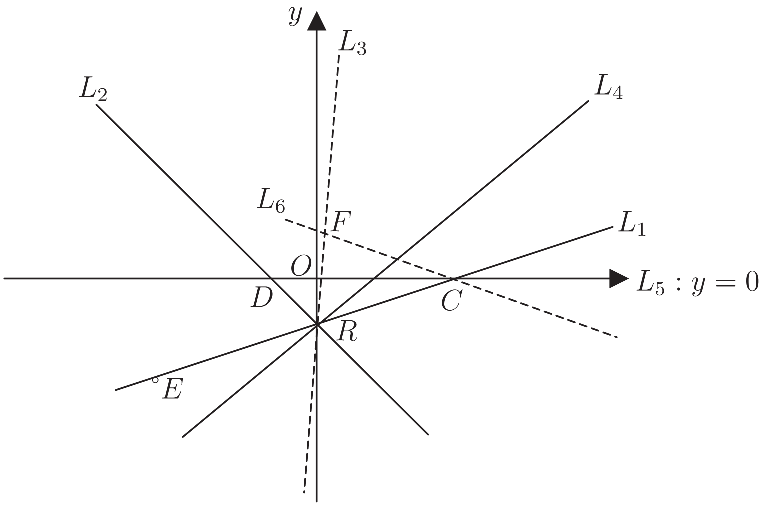


因過點 F 作垂直準線 L 的直線即爲對稱軸, 故拋物線的對稱軸不一定爲 y-軸。且因有無

限多條準線, 而每一條準線均對應一個焦點、頂點, 故頂點不一定在 x 軸上。同時可知有無限多條拋物線滿足題意, 故本題答案應爲 (2)(4)。

探討一: 此題所有焦點的軌跡爲單位圓的上半圓。

證明: (如下圖)



設準線 $L_1 : y + 1 = \tan \alpha x$ 其中 α 爲 L 與 x 軸正向的銳夾角, 即 $\alpha = \angle RCO = \angle FCO$, 令 $y = 0$ 得 $C(\cot \alpha, 0)$, 則

直線 $L_6 : y = \tan(\pi - \alpha)(x - \cot \alpha)$.............①

又 $\angle DRO = \angle ERO = \angle RDO + \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$

$\angle DOF = \angle RDO + \angle DRO = \dfrac{\pi}{4} + (\dfrac{\pi}{4} + \alpha) = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$

則 $\angle COF = \pi - \angle DOF = \pi - (\dfrac{\pi}{2} + \alpha) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

直線 $L_3 : y + 1 = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)x$......................②

由 ① ② 得 $F(\sin 2\alpha, \cos 2\alpha)$, 因 $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4} < \alpha \leq \pi$, $\therefore -1 < \sin 2\alpha < 1$, $0 < \cos 2\alpha \leq 1$。故所有焦點的軌跡爲單位圓的上半圓。(若拋物線未限制在上半平面, 此即爲 Lambert 定理)

探討二: 設準線的斜率爲 m, 則滿足題意的拋物線方程式爲

$$x^2 + 2mxy + m^2y^2 - 2mx - 2(2 - m^2)y + m^2 = 0,\ \text{其中}\ -1 < m < 1$$

證明: 準線爲 $L_1 : y + 1 = \tan \alpha \cdot x$, 因 $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4} < \alpha \leq \pi$,
$\therefore 0 \leq \tan \alpha = m < 1$, $-1 < \tan \alpha = m \leq 0$

焦點 $F(\sin 2\alpha, \cos 2\alpha)$, 由拋物線的定義可得,

$$\sqrt{(x-\sin 2\alpha)^2+(y-\cos 2\alpha)^2}=\frac{|\tan\alpha\cdot x-y-1|}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}$$

平方化簡得 $x^2+2\tan\alpha xy+\tan^2\alpha y^2-2\tan\alpha x-2(2-\tan^2\alpha)y+\tan^2\alpha=0$
因爲 $m=\tan\alpha$, 所以滿足題意的拋物線方程式爲

$$x^2+2mxy+m^2y^2-2mx-2(2-m^2)y+m^2=0,$$

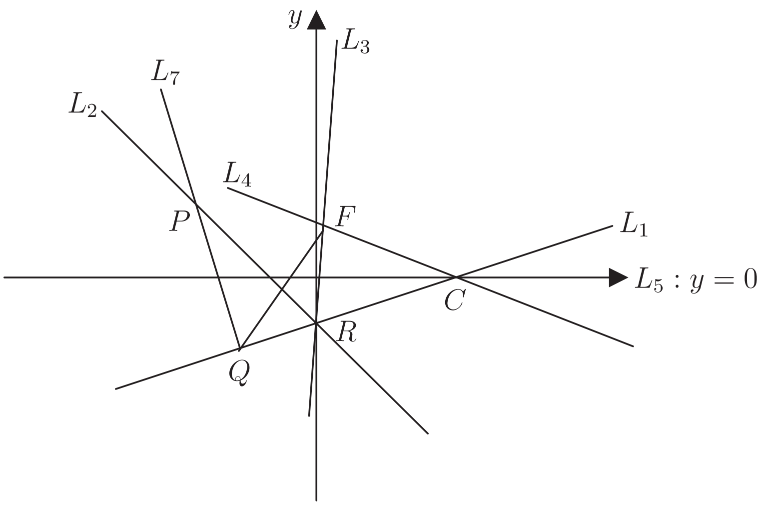
其中 $-1<m<1$。
當 $m=0$ 時, 方程式爲 $x^2=4y$, 即爲原題第 (2) 選項。

探討三: 切線 $L_2: y=-x-1$ 上的切點坐標爲 $(\dfrac{2}{m-1}, -\dfrac{m+1}{m-1})$, 其中 $-1<m<1$。

證明: 作焦點 F 關於切線 $L_2: y=-x-1$ 的對稱點 $Q(-2\cos^2\alpha, -\sin 2\alpha-1)$。由 (性質二) 得知, Q 點在準線 L_1 上。過 Q 點作垂直準線 L_1 的直線 L_7, 且交切線 L_2 於點 P, 則 $L_7: y+\sin 2\alpha+1=-\frac{1}{\tan\alpha}\cdot(x+2\cos^2\alpha)$ 由 (性質二) 得知, 點 P 爲切點。解聯立

$$\begin{cases} L_2: y=-x-1 \\ L_7: y+\sin 2\alpha+1=-\frac{1}{\tan\alpha}\cdot(x+2\cos^2\alpha) \end{cases}$$

可得 $P(\dfrac{2}{\tan\alpha-1}, \dfrac{-1-\tan\alpha}{\tan\alpha-1})$。因爲 $m=\tan\alpha$, 所以 $P(\dfrac{2}{m-1}, -\dfrac{m+1}{m-1})$。



同理可求得其他切線上切點的坐標。
此題引起頗多的討論, 於此提出個人淺見, 提供先進參考。

—本文作者現爲內湖高中數學教師—