數學傳播　30卷1期, pp. 36-39

九十四年指定科目考試數學的一疑題

以　明

近年來樂透大流行, 使一般小老百姓都很會猜數字, 沒想到這股歪風也吹到指定科目上。今年數學甲的指定科目考試, 主考官出了一個一般人沒辦法全盤解出的題目, 還好是一選擇題, 沒概念也可以瞎猜, 猜對了可以得到 8 分, 猜錯了會倒扣 4 分, 差距 12 分, 足以從台大電機系掉到台大大氣科學系 (只是打個比喻)。

更好玩的是考試後, 補教界公佈的答案與大考中心的幾乎沒有交集, 除一明確公認是對的選項外, 其他三選項你有我無, 我有你無。在承認大考中心的答案沒錯的前提下, 也有人用超出高中數學課程範圍的手法, 找到對稱軸不在 y-軸的拋物線。

筆者看過兩種解法, 一個是明顯錯誤的, 居然設定方程式是 $(x+3y)^2+ax+by+c=0$ 的形式, 另一個超出課程範圍。現提出的解法限制在高中程度, 計算上比較複雜。

一. 題目

引起爭議性的題目如下:

有一條拋物線位於坐標平面之上半面 (即其 y 坐標 ≥ 0), 並與 x-軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切。下列敘述何者正確:

(1) 此拋物線的對稱軸必爲 y-軸。

(2) 若此拋物線對稱軸爲 y-軸, 則其焦距爲 1。(註: 拋物線的焦距爲焦點到頂點的距離)

(3) 此拋物線的頂點必在 x-軸上。

(4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

上面選項 (2) 確定是對的。又 (1), (3) 與 (4) 是兩組互不相容的選項, 答案只有兩種可能, (1)(2)(3) 或 (2)(4)。選前者的人頭腦比較簡單, 以爲拋物線的方程式不是 $x^2=4py$ 就是

$y^2 = 4px$; 而選後者的人頭腦比較好, 但也沒有好到足以解出整個題目。底下是筆者用了一個下午的時間所得到的解法。

注意到拋物線在上半平面的條件是多餘的, 因拋物線與 x-軸相切, 故不是在上半平面就是下半平面, 又與另外兩直線 $y = x - 1$ 與 $y = -x - 1$ 相切, 非得在上半平面不可。

二. 解答

現以分段式解答如下:

(一) 拋物線與三直線 $y = 0$, $y = x - 1$ 與 $y = -x - 1$ 相切。方程式的二次項是完全平方數且 x^2 的係數不爲零, 可設定方程式爲

$$(x + \lambda y)^2 + 2ax + 2by + c = 0。$$

又 $b = a\lambda$ 時, 方程式爲

$$(x + \lambda y)^2 + 2a(x + \lambda y) + c = 0,$$

表示退化的拋物線, 故 $b \neq a\lambda$。

(二) 拋物線與 x-軸相切, $y = 0$ 代入時, 方程式

$$x^2 + 2ax + c = 0$$

有等根, 因此 $c = a^2$, 而可進一步設方程式爲

$$(x + \lambda y)^2 + 2ax + 2by + a^2 = 0, \quad b \neq a\lambda。$$

(三) 拋物線與直線 $y = x - 1$ 相切。現 $y = x - 1$ 代入得

$$(1 + \lambda)^2 x^2 + 2(a + b - \lambda(1 + \lambda))x + (\lambda^2 + a^2 - 2b) = 0。$$

上面是二次方程式且有等根, 故 $\lambda \neq -1$ 且

$$[a + b - \lambda(1 + \lambda)]^2 = (1 + \lambda)^2(\lambda^2 + a^2 - 2b)。$$

整理得出

$$(a + b)^2 - 2\lambda(1 + \lambda)(a + b) = (1 + \lambda)^2(a^2 - 2b)。 \tag{1}$$

(四) 另由拋物線與直線 $y=-x-1$ 相切, 得出 $\lambda\neq 1$ 且

$$(a-b)^2-2\lambda(1-\lambda)(a-b)=(1-\lambda)^2(a^2-2b)。\tag{2}$$

$(1)+(2)$, $(1)-(2)$, 去常數因數得出

$$a^2+b^2-2\lambda(a+b\lambda)=(1+\lambda^2)(a^2-2b)\tag{3}$$

$$ab-\lambda(b+a\lambda)=\lambda(a^2-2b)。\tag{4}$$

整理 (4) 得出 $b(a+\lambda)=a\lambda(a+\lambda)$, $(b-a\lambda)(a+\lambda)=0$, 但 $b\neq a\lambda$, 故 $a=-\lambda$。

(五) 以 $a=-\lambda$ 代入 (3), 整理得

$$b^2+2b=\lambda^4-2\lambda^2 \quad 或 \quad (b+1)^2=(\lambda^2-1)^2,$$

解出 $b=\lambda^2-2$ 或 $b=-\lambda^2$。但 $b=-\lambda^2$ 時又使 $b=a\lambda$, 是退化的情形。當 $a=-\lambda$, $b=\lambda^2-2$, 得出拋物線方程式爲

$$x^2+2\lambda xy+\lambda^2y^2-2\lambda x+2(\lambda^2-2)y+\lambda^2=0, \quad \lambda\neq\pm 1。$$

特別是 $\lambda=0$, 得出方程式爲 $x^2=4y$, 是以 y-軸爲對稱軸的拋物線。當然, 滿足三相切條件的拋物線不只一條。

三. 用常識判斷

其實二次曲線的方程式是二元二次方程式, 形如

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0。$$

五個條件才足以決定出六個係數 A, B, C, D, E, F 的比值。現所給的條件只是

(1) 拋物線, 即 $B^2=AC$。

(2) $y=0$, $y=x-1$, $y=-x-1$ 分別代入, 得出的二次方程式有等根, 這只提供 3 個條件。

故少了一個條件, 所得到的解帶有一參數。

現回到原先的問題上面, (2) 的選項是對的。當拋物線的對稱軸是 y 軸且與 x 軸相切時, 方程式必是 $y=ax^2$ 的形式, 又與直線 $y=x-1$ 相切, 二次方程

$$ax^2=x-1, ax^2-x+1=0$$

有等根, 而解出 $a=\frac{1}{4}$。拋物線是 $x^2=4y$, 頂點在 (0,0), 焦點在 (0,1) 之間的距離是1。

要是 (4) 的選項是對的話, (1)(3)的選項就不成立. 想拉出一拋物線時與三直線相切, 並不容易, 較省力的方式在一般式

$$(x+\lambda y)^2+2ax+2by+a^2=0, \quad b\neq a\lambda$$

中設定 λ, a, b 之一是定值, 但這樣做有冒險性, 萬一沒有解時需重新設定, 而重新再來一次, 故倒不如一開始就不設定。

四. 試題好不好

很顯然, 這不是一公平的考題, 大部份的考生不會有充分的時間去解出整個問題, 取代的方式只是去猜, 考試的方式到這種地步, 是不是有些出題人員對高中數學太生疏? 不會創造新題目, 也該有辦法用現有的題目更改數據。早期大專聯考有人去抄襲日本的試題, 連數據也一成不變, 這當然不能再發生, 但像這樣連高中老師都解不出的題目, 最好留著自己先研究研究, 待自己有了研究成果才拿出來考試, 否則補教界上門討標準答案, 若提不出令人心服口服的解法, 恐怕會使數學界招架不住。