數學傳播　30卷1期, pp. 25-35

微積分五講——
第一講 回顧中學數學

龔　昇・張德健

一. 百年前的一場演講

如果用科學發展的角度來看, 毫無疑問的, 二十世紀是結實纍纍, 大有收成的一個世紀, 單就數學的研究而言, 在過去這一百年中可說是突飛猛進!在上一個世紀開始時, 也就是在1900年8月5日, 德國數學家 David Hilbert (1862～1943) 在巴黎舉行的第二屆國際數學家大會上, 以《數學問題》爲題目發表了一篇非常著名的演講[1], 他在演講的開場白和結論中, 對數學的起源、意義、發展過程以及研究方法, 提出了許多精闢的見解, 而演講的主體乃是依據他對十九世紀數學研究的成果和發展的趨勢之心得, 而提出的二十三個數學問題; 這些問題涉及現代數學的大部分重要領域, 一百多年來, 這些問題一直激發著數學家們濃厚的研究興趣, 也帶動了數學研究的方向, 到目前爲止, 這二十三個數學問題中已有一半以上被解決, 也在某些問題上取得了重大進展, 但也有些問題仍未得到滿意的答案, 例如 Riemann 猜想和 Goldbach 猜想等。

現在回過頭來看 Hilbert 所提出的二十三個問題, 大多數的數學家對 Hilbert 的演講仍給予肯定的評價, 因爲這些問題的確對二十世紀數學的發展起了很大作用; 不過也有人提出不同的意見, 例如這些問題並未包含拓樸、微分幾何等學科, 而這些學科在上一世紀前期科學領域的發展中扮演了重要角色, 此外, 在那些問題中, 除數學物理外很少涉及應用數學等等。當然, Hilbert 更不會想到在二次世界大戰結束到今天將近六十年裏電腦快速的發展以及其對數學的重大影響! 過去一百年中數學領域的改變, 實在遠遠超出其當初所提的二十三個問題。

Hilbert 在 1900 年作他那著名的演講時, 年僅三十八歲, 但卻已是舉世公認與 Henri Poincaré (1854～1912) 和 Felix Klein (1849～1925) 並列, 當時數學界的三位領袖之一, 他們對數學的貢獻及其影響, 一方面反映出十九世紀數學的光輝, 另一方面也照耀著二十世紀數

學前進的路線。雖然他的演講已超過一百年, 但其中的一些話, 直到今日仍然適用。例如在演講的一開始, 他說:「我們當中有誰不想揭開未來的帷幕, 看看在今後的世紀裏我們這門科學發展的前景和奧秘呢? 我們下一代的主要數學思潮將會追尋什麼樣的特殊目標? 在廣闊而豐富的數學思想領域中, 新世紀將會帶來什麼樣的新方法和新成果?」他又說:「歷史教導我們, 科學的發展具有連續性, 我們知道, 每個時代都有自己的問題, 這些問題後來或者得以解決, 或者因為無所裨益而被拋到一邊並代之以新的問題, 因為一個偉大時代的結束, 不僅促使我們追溯過去, 而且把我們的思想引向未知的將來。」

二十世紀無疑是一個數學的偉大時代, 我們深信在這一個世紀中將會更加輝煌。不錯, 每個時代都有自己的問題, 在上一世紀來臨時, Hilbert 提出他認為是屬於那個世紀的二十三個數學問題, 這些問題對於過去一百年的數學發展有其不可磨滅的貢獻, 但上一世紀數學的成就卻遠遠超出他所想像! 那麼, 我們這個新世紀的問題又是什麼呢? 當然, 好些人也東施效顰地提出他們認為是屬於二十一世紀的數學問題, 但往往是仁者見仁, 智者見智, 到目前為止, 所有提出的問題, 還沒有一些像 Hilbert 當年提出的二十三個問題那樣為大家所普遍接受的。對 Hilbert 的二十三個問題, 我們不在這裏詳細介紹, 有興趣的讀者可以參閱李文林[2] 和王懷權 [3] 的著作。雖然一百年過去了, 但今日重讀他的演講, 依然得到許多的啓示, 在《左傳 · 襄公二十四年》裏提到:「太上有立德, 其次有立功, 其次有立言, 雖久不廢, 此之謂不朽。」我們想 Hilbert 在立言方面, 的確做到了藏諸名山, 傳之同好的境界; 在這裏想講的是, 以我們有限的知識與能力, 當然沒有辦法將他演說的各部分都作深入的闡述, 這裏我們只是想對他所說的一段話表示一點自己粗淺的體會而已[4]。

從十七世紀六十年代微積分發明以來, 無可否認的, 數學有長足的發展, 不但如此, 數學的分支愈來愈多, 在一百年前, 一些大數學家像Gauss, Riemann, Euler, Weierstrass 等人, 對每一個分支都懂, 並做出許多重要的貢獻, 但後來愈分愈細, 全面懂得各個分支的數學家愈來愈少, 到十九世紀末 Hilbert 演講時已是如此, 所以在他的演講中有這樣的一段話:「我們不禁要問, 隨著數學知識的不斷擴展, 個別的研究者想要全盤地了解這些知識的每一個細節, 豈不是變得不可能了嗎? 我想指出的是, 數學中每一步眞正的進展都與更有效的工具和更簡潔的方法之發現有關, 這些工具和方法同時有助於理解已有的理論, 並把陳舊、繁瑣的東西拋到一邊; 這是數學發展的基本特質。」他繼續說:「因此, 對於個別的數學工作者來說, 只要掌握了這些有效的工具和簡潔的方法, 他就有可能在數學的各分支中比其他科學更容易找到前進的道路。」有人做過統計, 現代數學已有六十個二級學科, 四百多個三級學科, 所以, Hilbert 上述所說的這一番話更顯得重要; 尤有進者, 他所講的實際上是指數學發展的歷史過程, 而這個過程正是推陳佈新。用句簡單的話來講, 是“高級”的數學取代“低級”的數學之過程!不但如此, 在數學發展的歷史中, 一些新的有效工具和簡潔方法之發現, 往往也標示著一個或多個新分支的產生, 同時也是一些舊分支的衰退甚至結束。

回顧一下我們從小開始學習數學的過程, 正是不斷地重複這個數學發展的過程。但我們要強調的是在我們學習的過程中, 一些數學雖然後來被更有效的工具和更簡潔的方法所產生的新數學所取代, 也就是“低級”的被“高級”的所取代, 但人在學習中, 卻不能只學習“高級”的, 而完全忽略“低級”的! 這是因爲人們的智慧隨著年齡而不斷增長, 學習與他的年齡、智力相當的數學才是最佳選擇, 因爲這是一個循序漸進的過程, 沒有將“低級”的數學打好基礎, 很難理解, 也學不好 “高級”的數學。以下我們從 Hilbert 演講中的這一段精闢的分析來認識我們中小學的數學課程, 不過我們也只是從數學發展的歷史角度來討論這個問題, 這與從教育的角度來考慮問題, 雖有關聯, 卻是不一樣的。

二. 算術與代數

人類有數字的觀念, 幾乎與人類開始用火一樣古老, 但是數字之出現於文字記載一直遲至公元前三千四百年左右[5], 至於數字的四則運算, 則爲期更晚; 在我國,《九章算術》是古代數學最重要的著作, 經秦朝到西漢中葉的衆多學者不斷修改、補充而成的一部學術鉅著, 其成書時間至遲在公元一世紀。這是一本以問題集形式而寫成的書, 書中共有二百四十六個題目, 分成九章, 其涵蓋面非常的廣, 書中提到分數的四則運算法則、比例算法、盈不足術、三元線性方程組的解法、正負數、開方以及一些計算幾何圖形的面積與體積等, 內容十分豐富。在西方, 大致在相同時間, 這些問題也相繼出現, 而這些內容包括了我們從小學一直到中學所學習的「算術」全部的課程, 換句話說, 人類經過了幾千年才逐漸弄明白的「算術」的內容, 對現在的人來講, 在童年時代花幾年就全部學會了。

對於「算術」來講, 眞正的發展是由於“更有效的工具和更簡潔的方法之發現”, 這個工具與方法就是“數字符號化”, 從而產生了另一門數學學科: 「代數學」, 即現在中學課程「代數」的內容。在我國, 這已是宋元時代 (約公元十三世紀五、六十年代), 在當時的著作中, 有所謂的「天元術」和「四元術」, 也就是讓未知數記作「天」元, 後來將兩個、三個及四個未知數記作「天」、「地」、「人」、「物」等四元, 也就是相當於現在用 x、y、z、w 來代表四個未知數, 有了這些「元」, 也就可以解一些代數方程式與聯立代數方程組了。而在西方, 徹底地完成數學符號化是在公元十六世紀。現在中學課程中的「代數」的內容, 包括解一元二次方程式, 以及解多元聯立方程組等; 當然, 在數字符號化之前, 一元二次方程式的解, 以及多元聯立方程組的解已經出現, 例如我國古代已有一些解一般數字係數的代數方程的「算法程序」, 但這些都是用文字表達的, 直到數字符號化之後, 才出現了現在中學代數內容的形式。

由數字符號化而產生的中學代數之內容, 的的確確是數學中眞正的發展,「代數」正符合了我們前面所提到的“更有效的工具和更簡潔的方法”;「算術」顧名思義可以理解爲「計算的技術與方法」, 課程名稱取爲「算術」, 也許是從我國古代的《九章算術》而來, 至於「代數」則可以

理解為“以符號代替數字”, 也即是數字符號化。在這裡, 我們要重複說一遍, 儘管中學的「代數」比小學的「算術」來的“高級”, 是由於“更有效的工具和更簡潔的方法”, 但並不意味著小學的「算術」就可以不必學了。這裡因為: (1)「算術」中的一些內容不能完全被「代數」所代取, 如四則運算等; (2) 即使是能被替代的內容, 適當地學習一些, 有利於對「代數」內容的認識與理解; (3) 從教育學的角度考慮, 這裡有循序漸進的問題, 有學生不同年齡段的接受能力的問題等等。

中學「代數」中的一個重要內容是解多元的一次方程組。在中學「代數」教材中, 一般著重講二元或三元一次聯立方程組, 所用的方法是消元法, 但是, 如果變元為四個或更多時, 就得另想辦法來建立起多元一次方程組的理論。經過很多年的努力, 向量空間、線性變換即矩陣的概念產生了, 這不但給出了多元一次聯立方程組的一般理論, 而且由此建立起一門新的學科「線性代數」。這是又一次“數學中眞正的進展”。由於“更有效的工具和更簡潔的方法”, 即向量空間、線性變換及矩陣的概念與方法的建立, 不僅對多元一次聯立代數方程組的理解更為清楚, 更為深刻, 且由於有了統一的處理方法, 可以把個別地處理方程組的方法“拋到一邊”。當然「線性代數」的產生還有些其他的因素, 但解多元一次聯立代數方程組是「線性代數」最重要, 最生動的模型, 而「線性代數」的產生的確再次印證了 Hilbert 所說的那段話。

在中學「代數」中另一重要內容是解一元二次方程組。在古代, 例如《九章算術》中已有解一般一元二次方程組的算法, 後來有很多的發展, 直到 M. al-Khowarizmi (783-850) 給出了相當於一般形式的一元二次方程組 $x^2+px+q=0$ 的一般的求根公式為 $x=-p/2\pm\sqrt{(p/2)^2-q}$ (但不取負根和零根)。1545年由 G. Cardano (1501～1576) 公佈了 N. Fontana (1499～1557) 發現的解一元三次方程的解。而一元四次方程的解是由 L. Ferrari (1522～1556) 所解決。於是當時大批的數學家致力於更高次方程的求根式解, 即企圖以方程的係數作加減乘除和正整數次方根等運算來將解表示出來。經過了兩個世紀的努力, 大批的數學家都失敗了, 直到1770年, J. L. Lagrange (1736～1813) 看到了五次及高次方程不可能做到這點。又過了半個世紀, 1824年 N. H. Abel (1802～1829) 解決了這個問題, 即對於一般的五次和五次以上的方程求根式解是不可能的。但什麼樣的代數方程是根式可解, 這個問題被 E. Galois (1811～1832) 所解決。他證明了: 方程根式可解若且唯若它的 Galois 群可解, 當然我們在這裡不解釋什麼叫群, 什麼是 Galois 群。Abel 與 Galois 不僅解決了三百年來無法解決的著名難題, 更重要的是: 為了解決這個問題, 他們建立起了「體」(field) 與「群」(group) 的概念。這就意味著現代代數理論的產生。這是又一次“數學中眞正的進展”。它是由於“更有效的工具和更簡潔的方法”, 即「體」與「群」之發現而造成的。有了「體」, 尤其是「群」以及後來發展起來的現代代數理論, 可以更清楚與更深刻地理解以往高次代數方程求解根式解的問題, 而的確可以把以往那些 “陳舊的、複雜的東西拋到一邊”, 從此翻開了數學嶄新的一頁。

以「群」、「環」(ring)、「體」為基本內容與出發點的現代代數理論, 這就是在大學課程中「近世代數」的內容, 這已成為現代數學中的基本內容與語言之一, 它們在歷史上及現代數學中都有

不可估量的作用。在1872年由 Klein 提出的著名 Erlangen program, 即認爲各種幾何學所研究的實際上就是在各種變化群下的不變量這個數學思想, 是企圖將以往看來關係不大的各種幾何學用統一的觀點來認識與研究, 不僅對幾何學的發展, 而且對整個數學的發展起了巨大的作用。又例如: 討論了幾千年的尺規作圖問題, 由於體論的出現而徹底解決。所謂的尺規作圖問題, 就是用無刻度直尺和圓規作平面或立體圖形, 最爲著名的如古希臘三大幾何作圖問題: (1) 三等分角, 即分任意角爲三等分。(2) 倍立方體, 即作一個立方體, 使其體積等於已知立方體的兩倍。(3) 化圓爲方, 即作一個與給定的圓面積相等的正方形。這些問題的提出是公元前5世紀以來逐漸形成的, 也不知有多少人爲之努力過而徒勞無功, 而這些問題的徹底解決不過是「體論」中一個基本而簡單的結論的推廣。

近代代數的來源與發展當然還有其他的因素, 但 Abel, Galois 的貢獻無疑是奠基性的。線性代數與近世代數之間有著深刻的聯繫。例如: 線性代數所討論的一個線性變換作用在一個向量空間上成爲近世代數中「模」(module) 的最基本的一個模型。

本節討論的內容可以簡略圖示如下 (圖1.1):

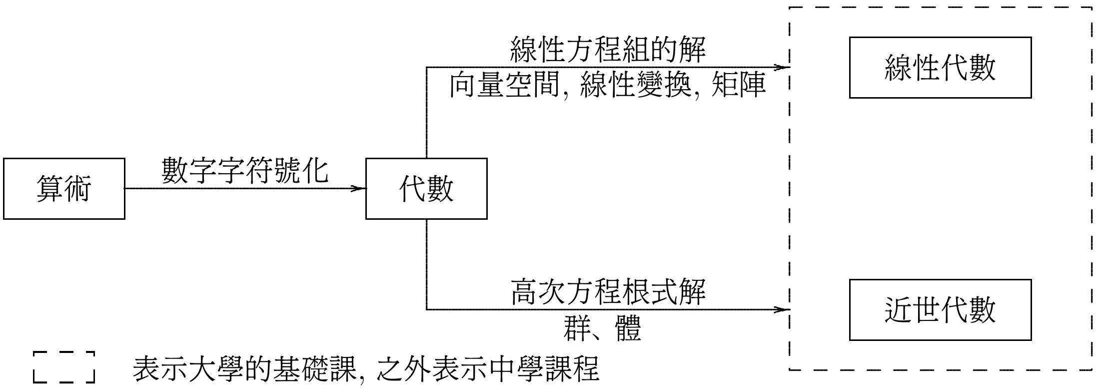

圖1.1.

三. 幾何與三角

人類在很早的時候, 就有各種計算面積與體積的公式或經驗公式, 也發展出不少幾何的定理。例如: 著名的畢達哥拉斯 (Pythagoras, 約公元前500年) 定理等。但在古代作爲幾何的代表作, 則是歐幾里德 (Euclid) 的《幾何原本》(Elements)[6]. Euclid 生平不詳, 只知他在公元前300年左右活躍於埃及的亞歷山大城。《幾何原本》共13卷, 包括5條公理, 5條公設, 119個定理和465條命題, 構成了歷史上第一個數學公理體系, 可以說其影響一直延續至今, 現在中學課程中的「平面幾何」與「立體幾何」的內容, 在《幾何原本》中都已有了。《幾何原本》不但包括了「平面幾何」與「立體幾何」的內容, 而且還涉及其他數學, 如一些簡單的數論等等。所以

《幾何原本》不完全是一部純幾何的著作, 這是一部歷史上僅次於聖經被翻印次數最多的著作之一, 這是一部歷史上應用時間長達兩千年的書, 而且影響到許多其他學科。

總之, 現在我們中學裡學習的「平面幾何」與「立體幾何」的基本內容, 是兩千三百年前已有的內容。從《幾何原本》問世以來, 幾何領域一直是它的一統天下, 這種現象持續了一千多年。“眞正的進展”是 R. Descartes (1596∼1650) 與 P. de Fermat (1601∼1665) 建立起來的「解析幾何」的產生, 其基本思想是在平面上引進「坐標」, 使得平面上的點與實數對(x, y)之間建立起一一對應, 於是幾何問題可以用代數形式來表達, 而幾何問題的求解就歸化爲代數問題的求解。一旦代數問題得解, 就可以得到幾何問題的解。Descartes 甚至還提出過一個大膽的計劃, 即

一般問題 ⟶ 數學問題 ⟶ 代數問題 ⟶ 方程求解

也就是說, 任何問題都可以化約爲數學問題, 而任何數學問題都可以化約爲代數問題, 而任何代數問題都可以化約爲方程求解問題。一旦方程得解, 則代數問題、數學問題從而原來的問題就得解, 對一些問題來說, 這也許是對的, 可行的, 例如: 對一些幾何問題, 這往往是很有效的, 但一般來說這是難於實現的。

「解析幾何」的產生可以理解爲變量數學的開始, 爲微積分的誕生創造了條件。由於引進了坐標, 幾何問題歸結爲代數問題, 於是可以用一些代數的工具與方法來處理, 從而使幾何問題得解。這種思想方法使整個數學面目爲之一新, 這的確是“數學中一步眞正的進展”。引入坐標系統, 建立起點與數對之間的一一對應, 的確是“更有效的工具和更簡潔的方法”, 而這些工具和方法的確可以更深刻理解已有的理論。如直線就是一次方程, 圓錐曲線就是二次方程等, 而也的確可以“把陳舊與複雜的東西”, 如一些平面幾何難題的複雜的解題技巧等“拋到一邊”。

現在中學生學習的「解析幾何」課程的內容, 基本上是十七世紀由 Descartes 與 Fermat 建立起來的內容, 也就是三百多年前的內容, 其中除了討論直線、平面、球以外, 還有圓錐曲線。人類對圓錐曲線的討論, 甚至可以追溯到 Apollonius (約公元前262∼公元前190)。但人們對圓錐曲面有完全淸楚的認識, 也許是在解析幾何產生後。由於引進了坐標系統, 人們不僅能討論直線與平面: 一次曲線與曲面, 圓、球、圓錐曲線與曲面: 二次曲線與曲面, 還能討論更爲高次的曲線與其他曲面。不僅如此, 由於幾何問題歸結爲代數問題, 可以通過計算來證明與製造各種幾何定理, 這就是“機器證明”, 數學家吳文俊對此曾作出了重大貢獻。

既然「解析幾何」是數學中一步眞正的進展, 換句話說, 解析幾何比起平面幾何與立體幾何都來得有用, 那麼平面幾何與立體幾何是不是就不要學習, 是不是直接學習解析幾何就可以了

呢? 從教育學的觀點, 這顯然是不對的, 我們所說的 “把陳舊與複雜的東西拋到一邊”是指「解析幾何」產生之後, 那種用原來的方法來創造和發明幾何定理的時代已經過去了。

在中學學習「平面幾何」與「立體幾何」, 至少有以下幾點理由:(1) 可以認識我們生活的三維歐氏空間中一些最基本的幾何關係與性質, 即幾何直覺; (2) 不學習「平面幾何」與「立體幾何」, 無法學習「解析幾何」與「微積分」; (3) 平面幾何與立體幾何是訓練學生嚴格邏輯思維的最好方法之一, 這種訓練比上一門「形式邏輯學」更爲有效, 且這種訓練對學生終身有用。至於中學課程中有關平面幾何與立體幾何應保留多少內容, 是一個值得商榷的問題, 讓學生做過多的幾何難題似乎是不必要的, 但完全刪除卻是絕對錯誤的。

古典幾何的另一個 “眞正的進展”是非歐幾何的產生, 這是數學史上劃時代的貢獻, 是十九世紀最重要的數學大事之一, 它打破了歐氏幾何的一統天下, 給人們很多啓示, 數學從此翻開了全新的一頁。前面說到歐幾里德的《幾何原本》有五條公理, 五條公設是:(1) 從任意一點到任意一點可作一直線; (2) 一條直線可不斷延長; (3) 以任意中心和直徑可以畫圓;(4) 凡直角都彼此相等; (5) 若一直線落在兩直線上所構成的同邊內角和小於兩直角, 那麼把兩直線無限延長, 它們將在同邊內角和小於兩直角的一側相交。人們對前四條感到簡潔、明瞭、無可厚非, 而對第五公設, 感到它不像一條公設, 而更像一條定理, 也就是說, 第五公設可以從其他公設、公理及定理中推導出來。第五公設 (也叫平行公設) 有很多等價的敍述, 最常用的爲:「過已知直線外一點, 能且只能作一條直線與已知直線平行」。

兩千多年來, 不知有多少數學家致力於用其他的公設、公理及定理來證明第五公設, 甚至有人窮其一生, 但統統歸於失敗。直到十九世紀, 高斯 C. F. Gauss (1777∼1855)、J. Bolyai (1802∼1860)、N. U. Lobatchevsky (1792∼1856) 創立了非歐幾何學, 才結束了這件公案。他們三人各自獨立幾乎是同時創立了非歐幾何學。其主要思想是: 一反過去人們企圖從其他公設、公理及定理來證明第五公設的做法, 認爲第五公設不可能從其他公設、公理及定理中推出來, 從而發展起第五公設不成立的新的幾何學。高斯稱之爲「非歐幾里德幾何學」, 簡稱「非歐幾何學」。如同一切新生事物所要經歷的那樣, 非歐幾何學從發現到普遍接受, 經歷了曲折的道路, 要爲大家普遍接受, 需要確實地建立起「非歐幾何」本身的無矛盾性和現實意義。

1854 年黎曼 (B. Riemann (1826∼1866)) 在非歐幾何的思想基礎上將 Euler, Gauss 等數學家的工作發揚光大, 建立了更爲廣泛的幾何學, 即「黎曼幾何」。他在空間上引入了黎曼度量。對於曲率爲常數的空間, 稱爲常曲率空間。在這種空間中, 當常曲率爲零時, 就是歐氏空間, 在此空間中過 “直線”外一點只有一條“平行線”; 當常曲率爲負數時, 過 “直線” 外一點, 則可以作多於一條的 “平行線” 。

由非歐幾何思想爲基礎而建立起來的「黎曼幾何」, 開創了幾何學甚至整個數學的新紀元, 其發展更是一日千里。衆所周知, 愛因斯坦 (A. Einstein (1879∼1955)) 以「黎曼幾何」作爲

數學工具來研究相對論。簡單來講, 黎曼幾何是研究古典力學的一個極爲有效的工具, 事實上, 我們可以將黎曼幾何理解成一個由二階橢圓型偏微分方程, 基本上是 Laplace-Beltrami 算子, 所導引出來的幾何; 但自二十世紀初, 量子力學在 Heisenberg、Schrödinger、Planck 等大師的研究之下開展了近代物理學上光輝燦爛的一頁; 相似於古典力學, 在量子力學中一個量子的位置 (position) 與動量 (moment) 也是由一組非交換的微分算子所刻劃, 但不同於古典力學的是此時位置與動量沒有辦法同時由這些算子測量出來, 不過, 這些算子的 Lie bracket 是符合「海森堡測不準原理」(Heisenberg Uncertainty Principle), 因而開創出偏微分方程中的一個新的領域:「次橢圓型微分算子」(sub-elliptic differential operators) 之研究, 而由次橢圓型微分算子所導引出來的幾何便稱爲「次黎曼幾何」(subRiemannian geometry), 在過去幾年中, 這一個新的分支已有一些進展[7]。「次黎曼幾何」與「黎曼幾何」的內容在實質上有很大的差異, 而這些性質並不能由已知的「黎曼幾何」中的定理 "推廣" 而來, 正如我們不可能由「歐氏幾何」已知的定理, 直接加以 "推廣" 而得到「非歐幾何」一樣!

經歷了兩千年的思索與努力, 非歐幾何的產生的確是數學中一步眞正的進展, 打破了歐氏幾何的一統天下, 把「歐氏幾何」中已有的理論, 從更高、更深的角度去理解它。事實上, 我們可以有很多種幾何學來描寫與刻畫空間形式, 歐氏幾何學是其中的一種, 從某種意義上講, 這是最爲簡單的一種。由於非歐幾何的產生, 把那些用舊有的思想, 企圖用其他的公設、公理及定理來證明第五公設的一切做法 "拋到一邊"。

現在的大學數學基礎課「微分幾何」就是以微積分爲工具初步介紹這些內容的。在中學數學課程中, 還有一門叫「三角函數」。這門課程與幾何密切相關, 主要是討論6個三角函數 $\sin x, \cos x, \ldots$ 等的相應關係與計算。人們對三角學的研究可以追溯到公元第一、第二世紀, 當時爲了研究天文學的需要, 已經爲三角學奠定了基礎, 例如已經有了類似於正弦及正弦表等。經過了幾百年的努力, 到公元第九、第十世紀, 三角函數的研究已經系統化, 到公元第十三世紀, 球面三角也已基本完成。因此, 現在中學學習的「三角函數」, 其內容基本上在一千年前就形成了。

對「三角函數」從更高的角度來認識, 是由於複數的引入。人們對複數的思考由來已久, 例如對方程 $x^2+1=0$ 的根思考, 但人們認眞地將虛數 $\sqrt{-1}=i$ 引入數學已是十六世紀的事了。之後, L. Euler (1707∼1783) 建立了著名的 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 使得「三角函數」中不少問題, 都可轉化成複數的問題來討論, 於是原來三角函數中一大批問題得以輕鬆地解決。複數及 Euler 公式的引入, 是另一個 "數學中眞正的進展", 以 "更有效的工具和最簡潔的方法" 來處理三角函數以及其他一些學科的問題, 而有了複數與 Euler公式, 使得人們對三角函數的已有理論的理解更爲深刻, 可以把一些原始的, 複雜的處理三角函數三方法與工具 "拋到一邊"。儘管複數與 Euler 公式比三角函數來的 "高級", 但並不意味著中學課程可以不要學

習三角函數。因爲 Euler 公式的建立需要更高深的數學, 這是超出中學數學範疇的, 而且三角學是一門非常實用的數學分支, 在很多其他學科中都會用到。本節討論的內容可以簡要的以下圖 (圖1.2) 表示:

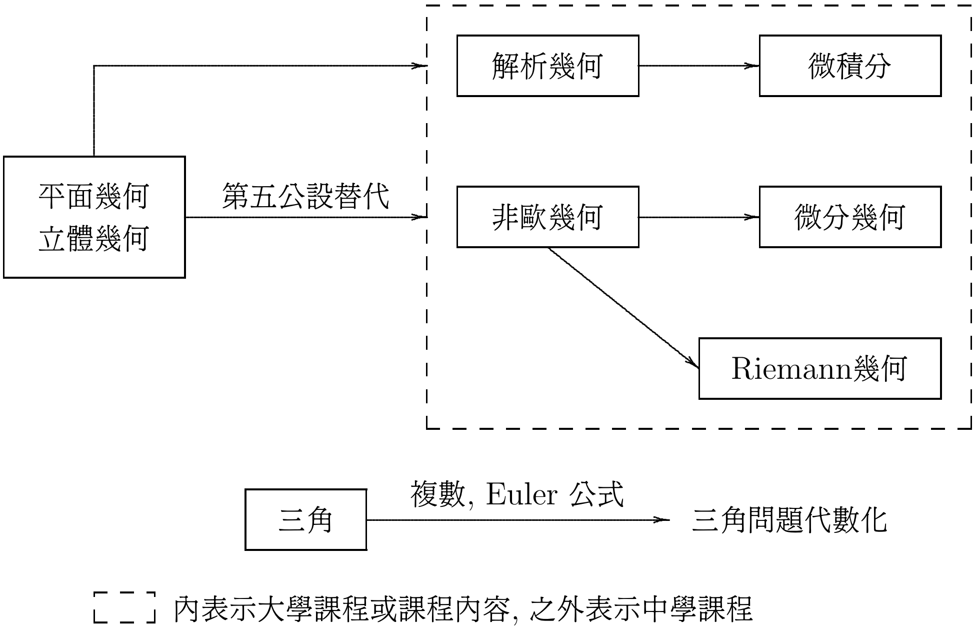

圖1.2.

在這一節與上一節中, 我們從 Hilbert 著名講演中的精辟論述出發, 回顧了中、小學的數學課程, 以及與後續的大學數學課程之間的關係, 但必須說明兩點: (1) 一門學科的產生有多方面的因素, 我們在這裡往往只說一個因素, 而這個因素也許是主要因素之一。如果要各種因素都說到, 對每一門學科都可以說很多話來討論它的來源, 但這不是在短短的文章裏所能做到的, 而且反而沖淡了主題;(2) 一門學科對其他學科的影響也是多方面的, 例如: 中學的「代數」課程, 從方程式的角度, 引發了「線性代數」及「近世代數」的產生, 但從排列組合的角度, 引發了「組合數學」的產生。又例如:「非歐幾何」的產生不僅導致「黎曼幾何」的誕生, 也引發了「幾何基礎」的深入討論等。

四. 三點啓示

從上面的論述中, 我們能得到什麼啓示呢?

你們也許已經發現, "數學中眞正的進展" 往往是來自於一些看來十分簡單明瞭的想法。正好比從算術走向代數, 關鍵的一步是 "數學符號化", 同樣由「平面幾何」、「立體幾何」走向「解

析幾何」, 關鍵的一步是“引入坐標系統”, 亦即將平面的點與數對一一對應, 正是由於這樣看似簡單的一步, 引發了“數學中眞正的進展”。而 “數學符號化”、“引入坐標”都是花了千年的時間才產生的, 仔細想想, “數學符號化” 比算術中的一道難題可能更易理解, “數學符號化”之後, 解算術難題則輕而易舉。還記得我們在小學學算術時, 要解雞兎同籠問題, 感到很難。在一個籠子中關著雞和兎, 已知有多少個頭, 多少隻脚, 問有多少隻雞、多少隻兎? 等到學了初中代數, 才明白這不過是解二元一次聯立方程的問題, 而解此方程組十分容易, 不論是雞兎同籠或鴨狗同室, 都可用此法來解, 心中豁然開朗。初中代數當然比小學算術來的 “高級”, 但“高級”的確比“低級”的容易, 且“高級”的替代了“低級”的。同樣, “引入坐標系統”, 比平面幾何中的一道難題的解可能更易理解, “引入坐標”之後解幾何題則比較容易了。一些幾何的定理與習題, 往往不易理解與解答, 如輔助線應該添在哪裡? 應該先證哪些線、角或三角形相等或全同? 一些習題解起來甚至十分困難, 如著名的九點圓定理等。但有了解析幾何之後, 將一些幾何問題代數化, 使相當一部分平面幾何及立體幾何變得容易。當然「解析幾何」比「平面幾何」及「立體幾何」來得 “高級”, 但“高級”的確比“低級”的容易, 而且是“高級”的可以替代 “低級”的。再例如, 人們知道了 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 之後, 發現中學裡學習的一大批的三角公式與定理不過是這麼簡單的推論, 而 Euler 公式十分簡單, 極易記住, 倒是一些三角公式往往不易記住, 而現在學習的三角課程中, 它們的推導與證明往往很複雜, 當然 Euler 公式比三角來得高級, 但高級的確比低級的容易。

上述這些例子說明: 一些高級的數學往往十分明瞭, 更有概括性, 極易記住, 相對而言一些較爲低級的數學往往複雜, 不易記住, 所以我們第一個啓示是: “高級”的數學未必困難, “低級”的數學未必容易。這是高、低與難、易之間的辯證關係。第二個令人深思的啓示是: 重要的是要有創新的思維。“數字符號化”、“引入坐標系統”、「向量空間」、「線性變換」、第五公設的替代以及群、環、體等想法的產生, 這些看似簡單的想法, 卻是了不起的創新思想。正是由於有了這種創新思想, 才會在數學中跨出 “眞正進展”的一步。當然, 這種創新思想來之不易, 往往經過幾百年, 以至上千年的積累才能形成, 經過長期的積累, 走向成熟, 往往就會有數學大師總結與提昇前人的成果, 進而提出劃時代的創新思想, 這就是數學的演進。當然, 一個劃時代的創新思想, 就是數學史上的一個里程碑; 而一個劃時代的創新思想的形成, 往往是無數個各種水平的創新思想的積累所形成的。

第三點啓示: 數學的歷史也像一部戰爭史, 往往是“一將功成萬骨枯”! 想想從歐幾里德的《幾何原本》誕生之後, 幾千年來, 不知有多少數學家前仆後繼地企圖用其他公設、公理及定理來證明第五公設, 這些人都失敗了, 都默默無聞, 數學史上不會記載他們的名字, 實際上, 他們都犧牲了。但正是由於千千萬萬個無名數學家的犧牲, 導致了 Gauss, Bolyai, Lobatchevsky 從另外的角度來處理這個問題, 他們成功了, 他們成了英雄。同樣自從二次、三次以及四次一元代

數方程式得到根式解後, 幾百年來, 也不知有多少數學家前仆後繼地企圖找到五次及更高次一元代數方程的根式解, 但他們都失敗了; 不過他們的犧牲, 卻導致了 Lagrange、Abel 與 Galois 從新的角度來觀察這個問題, 名垂數學史。再舉一個最近的例子, 大家都知道 Fermat 最後定理是在1637年提出的, 在過去350年中多少數學家甚至素人數學愛好者嚐試去解這個 “猜想”, 但他們都沒有成功, 直到1994年 Andrew Wiles 在其125頁的文章中對這個定理給出一個完全的證明, 因此也爲 Wiles 帶來極大的榮譽; 我們要講的是, 他們的成功是植基於幾百年來許多默默無聞的數學家失敗的基礎, 這也可以說是一將功成萬骨枯。至於幾千年來, 那些企圖用無刻度的直尺與圓規來解前面提到的古希臘三大作圖難題的無數數學家們, 他們更是全軍覆沒, 全都犧牲了。這樣的例子還可以舉出很多。從這些數學的歷史, 啓示我們, 我們應該如何來選擇數學問題, 如何來思考與處理數學問題, 才能儘量減少犧牲, 以獲得成功。

後記

這幾篇文章是依據第一作者在中國科技大學及第二作者在美國喬治城大學所作的一系列演講所編寫而成。作者特別在此向此兩大學的同仁致謝, 感謝他們對這些演講所提供的意見。

参考文獻

1. D. Hilbert, Cottinger Nachrichten, 1900, 253～297; The Bulletin of American Mathematical Society. 8, 1902, 437～445, 478～479.
2. 李文林, 數學史概論, 第二版, 高等教育出版社, 北京, 2002。
3. 王懷權, 數學發展史, 協進圖書有限公司, 台北, 1981。
4. 龔昇, 微積分五講, 科學出版社, 北京, 2004。
5. D. M. Burton, The History of Mathematics: An Introduction, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 2003.
6. Euclid, The thirteen books of the Elements, Trans from text of Heiberg with introduction and commentary by T. L. Heath, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1908.
7. O. Calin, D. C. Chang and P. Griener, Geometric mechanics on the Heisenberg group and its applications, to be published by American Mathematical Society & International Press, Cambridge, Massachusetts, 2006.

—本文作者龔昇任教於中國科技大學; 張德健任教於美國 Georgetown University 數學系—