

數學和中國文學的比較

丘成桐

很多人會覺得我今日的講題有些奇怪，中國文學與數學好像是風馬牛不相及，但我卻討論它。其實這關乎個人的感受和愛好，不見得其他數學家有同樣的感覺，「如人飲水，冷暖自知」。每個人的成長和風格跟他的文化背景、家庭教育有莫大的關係。我幼受庭訓，影響我至深的是中國文學，而我最大的興趣是數學，所以將他們做一個比較，對我來說是相當有意義的事。

中國古代文學記載最早的是詩三百篇，有風雅頌，既有民間抒情之歌，朝廷禮儀之作，也有歌頌或諷刺當政者之曲。至孔子時，文學為君子立德和陶冶民風而服務。戰國時，諸子百家都有著述，在文學上有重要的貢獻，但是諸子如韓非卻輕視文學之士。屈原開千古辭賦之先河，畢生之志卻在楚國的復興。文學本身在古代社會沒有佔據到重要的地位。司馬遷甚至說：「文史、星曆，近乎卜祝之間，固主上所戲弄，倡優畜之，流俗之所輕也。」一直到曹丕才全面肯定文學本身的重要性：「蓋文章，經國之大業，不朽之盛事。」即使如此，曹丕的弟弟曹植卻不以為文學能與治國的重要性相比。他寫信給他的朋友楊修說：

「吾雖德薄，位為蕃侯，猶幾戮力上國，流惠下民，建永世之業，留金石之功。豈徒以翰墨為勳績，辭賦為君子哉。」

至於數學，中國儒家將它放在六藝之末，是一個輔助性的學問。當政者更視之為雕蟲小技，與文學比較，連歌頌朝廷的能力都沒有，政府對數學的尊重要到近年來才有極大的改進。西方則不然，希臘哲人以數學為萬學之基。帕拉圖以通幾何為入其門檻之先決條件，所以數學家得到崇高地位，在西方蓬勃發展了兩千多年。

一. 數學之基本意義

數學之為學，有其獨特之處，它本身是尋求自然界真相的一門科學，但數學家也如文學家般天馬行空，憑愛好而創作，故此數學可說是人文科學和自然科學的橋樑。

數學家研究大自然所提供的一切素材，尋找它們共同的規律，用數學的方法表達出來。這裏所說的大自然比一般人所瞭解的來得廣泛，我們認為數字、幾何圖形和各種有意義的規律都是自然界的一部份，我們希望用簡潔的數學語言將這些自然現象的本質表現出來。

數學是一門公理化的科學，所有命題必需由三段論證的邏輯方法推導出來，但這只是數學的形式，而不是數學的精髓。大部份數學著作枯燥乏味，而有些卻令人嘆為觀止，其中的分別在那裏？

大略言之，數學家以其對大自然感受的深刻膚淺，來決定研究的方向，這種感受既有其客觀性，也有其主觀性，後者則取決於個人的氣質，氣質與文化修養有關，無論是選擇懸而未決的難題，或者創造新的方向，文化修養皆起著關鍵性的作用。文化修養是以數學的功夫為基礎，自然科學為副，但是深厚的人文知識也極為要緊，因為人文知識也致力於描述心靈對大自然的感受，所以司馬遷寫史記除了「通古今之變」外，也要「究天人之際」。

劉勰在文心雕龍·原道篇說文章之道在於：

「寫天地之輝光，曉生民之耳目。」

劉勰以為文章之可貴，在尚自然，在貴文采。他又說：

「人與天地相參，乃性靈所集聚，是以謂之三才，為五行之秀氣，實天地之靈氣。靈心既生，於是語言以立。語言既立，於是文章著明，此亦原於自然之道也。」

文心雕龍·風骨：

「詩總六義，風冠其首，斯乃化感之本源，志氣之符契也。」

歷代的大數學家如阿基米德如牛頓莫不以自然為宗，見物象而思數學之所出，即有微積分的創作。費爾瑪和尤拉對變分法的開創性發明也是由於探索自然界的現象而引起的。

近代幾何學的創始人高斯認為幾何和物理不可分，他說：「我越來越確信幾何的必然性無法被驗證，至少現在無法被人類或為了人類而驗證，我們或許能在未來領悟到那無法知曉的空間的本質。我們無法把幾何和純粹是先驗的算術歸為一類，幾何和力學卻不可分割。」

二十世紀幾何學的發展，則因物理學上重要的突破而屢次改變其航道。當狄拉克把狹義相對論用到量化的電子運動理論時，發現了狄拉克方程，以後的發展連狄拉克本人也嘆為觀止，認為他的方程比他的想像來得美妙，這個方程在近代幾何的發展起著關鍵性的貢獻，我們對旋子的描述缺乏直觀的幾何感覺，但它出於自然，自然界賦予幾何的威力可說是無微不至。

廣義相對論提出了場方程，它的幾何結構成為幾何學家夢寐以求的對象，因為它能賦予空間一個調和而完美的結構。我研究這種幾何結構垂三十年，時而迷惘，時而興奮，自覺同詩經、楚辭的作者，或晉朝的陶淵明一樣，與大自然渾為一體，自得其趣。

捕捉大自然的真和美，實遠勝於一切人為的造作，正如文心雕龍說的：

「雲霞雕色，有踰畫工之妙。草木菁華，無待錦匠之奇，夫豈外飾，蓋自然耳。」

在空間上是否存在滿足引力場方程的幾何結構是一個極為重要的物理問題，它也逐漸地變成幾何中偉大的問題。儘管其他幾何學家都不相信它存在，我卻鑠而不捨，不分晝夜地去研究它，就如屈原所說：

「亦余心之所善兮，雖九死其猶未悔。」

我花了五年工夫，終於找到了具有超對稱的引力場結構，並將它創造成數學上的重要工具。當時的心境，可以用以下兩句來描述：

「落花人獨立，微雨燕雙飛。」

以後大批的弦理論學家參與研究這個結構，得出很多深入的結果。剛開始時，我的朋友們都對這類問題敬而遠之，不願意與物理學家打交道。但我深信造化不致弄人，回顧十多年來在這方面的研究尚算滿意，現在卡拉比—丘空間的理論已經成為數學的一支主流。

二．數學的文采

數學的文采，表現於簡潔，寥寥數語，便能道出不同現象的法則，甚至在自然界中發揮作用，這是數學優雅美麗的地方。我的老師陳省身先生創作的陳氏類，就文采斐然，令人讚歎。它在扭曲的空間中找到簡潔的不變量，在現象界中成為物理學界求量子化的主要工具，可說是描述大自然美麗的詩篇，直如陶淵明「採菊東籬下，悠然見南山」的意境。

從歐氏幾何的公理化、到笛卡兒創立的解析幾何，到牛頓、萊布尼茲的微積分，到高斯、黎曼創立的內蘊幾何，一直到與物理學水乳相融的近代幾何，都以簡潔而富於變化為宗，其文采絕不遜色于任何一件文學創作，它們軼生的時代與文藝興起的時代相同，絕對不是巧合。

數學家在開創新的數學想法的時候，可以看到高雅的文采和嶄新的風格，例如畢達哥拉斯證明 $\sqrt{2}$ 為無理數，歐幾里得證明存在無窮多個素數，開創反證法的先河。高斯研究十七邊形的對稱群，使伽羅華群成為數論的骨幹。這些研究異軍突起，論斷華茂，使人想起五言詩的始祖蘇（武）李（陵）唱和詩和詞的始祖李太白的憶秦娥。

三．數學中的賦比興

中國詩詞都講究比興，鍾燦在「詩品」中說：

「文已盡而意有餘，興也。因物喻志，比也。」

劉勰在文心雕龍中說：

「故比者，附也。興者，起也。附理者切類以指事，起情者依微以擬議。起情故興體以立，附理故比例以生。」

白居易：

「噫，風雪花草之物《三百篇》中豈含之乎？顧所用何如耳，設如北風其涼，假風以刺威虐也，雨雪霏霏，因雪以愍征役也……比興發於此而義歸於彼。」

他批評謝朓詩「『餘霞散成綺，澄江淨如練。』麗則麗矣，吾不知其所諷焉，故僕所謂嘲風雪，弄花草而已，文意盡去矣。」

有深度的文學作品必需要有「義」、有「諷」、有「比興」。數學亦如是。我們在尋求真知時，往往只能憑已有的經驗，因循研究的大方向，憑我們對大自然的感覺而向前邁進，這種感覺是相當主觀的，因個人的文化修養而定。

文學家爲了達到最佳意境的描述，不見得忠實地描寫現象界，例如賈島只追究「僧推月下門」或是「僧敲月下門」的意境，而不在乎所說的是不同的事實。數學家爲了創造美好的理論，也不必依隨大自然的規律，只要邏輯推導沒有問題，就可以盡情的發揮想像力，然而文章終究有高下之分。大致來說，好的文章「比興」的手法總會比較豐富。

中國古詩十九首，作者年代不詳，但大家都認爲是漢代的作品。劉勰說：「比采而推，兩漢之作乎。」這是從詩的結構和風格進行推敲而得出的結論。在數學的研究過程中，我們亦利用比的方法去尋找真理。我們創造新的方向時，不必憑實驗，而是憑數學的文化涵養去猜測去求證。

舉例而言，三十年前我提出一個猜測，斷言三維球面裏的光滑極小曲面，其第一特徵值等於二。當時這些曲面例子不多，只是憑直覺，利用相關情況類比而得出的猜測，最近有數學家寫了一篇文章證明這個猜想。其實我的看法與文學上的比興很相似。

我們看洛神賦：

「翩若驚鴻，婉若游龍。榮曜秋菊，華茂春松。鬋鬋兮若輕雲之蔽月，飄飄兮若流風之回雪。」

由比喻來刻劃女神的體態，又看詩經：

「高山仰止，景行行止。四牡騤騤，六轡如琴，靚爾新婚，以慰我心。」

也是用比的方法來描寫新婚的心情。

我一方面想像三維球的極小子曲面應當是如何的勻稱，一方面想像第一譜函數能夠同空間的線性函數比較該有多妙，通過原點的平面將曲面最多切成兩塊，於是猜想這兩個函數應當相等，同時第一特徵值等於二。

當時我與卡拉比教授討論這個問題，他也相信這個猜測是對的。旁邊我的一位研究生問爲甚麼會做這樣的猜測，不待我回答，卡教授便微笑說這就是洞察力了。

數學上常見的對比方法乃是低維空間和高維空間現象的對比。我們雖然看不到高維空間的事物，但可以看到一維或二維的現象，並由此來推測高維的變化。我在做研究生時企圖將二維空間的單值化原理推廣到高維空間，得到一些漂亮的猜測，我認爲曲率的正或負可以作爲複結構的指向，這個看法影響至今，可以溯源到十九世紀和二十世紀初期曲率和保角映射關係的研究。

另外一個對比的方法乃是數學不同分枝的比較，記得我從前用愛氏結構證明代數幾何中一個重要不等式時，日本數學家 Miyaoka 利用俄國數學家 Bogomolov 的代數穩定性理論也給出這個不等式的不同證明，因此我深信愛氏結構和流形的代數穩定有密切的關係，這三十年來的發展也確是朝這個方向蓬勃地進行。

事實上，愛因斯坦的廣義相對論也是對比各種不同的學問而創造成功的，它是科學史上最偉大的構思，可以說是驚天地而泣鬼神的工作。它統一了古典的引力理論和狹義相對論。愛氏花了十年功夫，基於等價原理，比較了各種描述引力場的方法，巧妙地用幾何張量來表達了引力場，將時空觀念全盤翻新。

愛氏所用的工具是黎曼幾何，乃是黎曼比他早五十年前發展出來的，當時的幾何學家唯一的工具是對比，在古典微積分、雙曲幾何和流形理論的類比後得出來的漂亮理論。反過來說，廣義相對論給黎曼幾何注入了新的生命。

二十世紀數論的一個大突破乃是算術幾何的產生，利用群表示理論為橋樑，將古典的代數幾何、拓樸學和代數數論比較，有如瑰麗的歌曲，它的發展，勢不可擋，氣勢如虹，「天之所開，不可當也」。

Weil 研究代數曲線在有限域上解的問題後，得出高維代數流形有限域解的猜測，推廣了代數流形的基本意義，直接影響了近代數學的發展。籌學所問，無過於此矣。

偉大的數學家遠矚高瞻，看出整個學問的大流，有很多合作者和跟隨者將支架建立起來，解決很多重要的問題。正如曹雪芹創造紅樓夢時，也是一樣，全書既有真實，亦有虛構。既有前人小說如西廂記、金瓶梅、牡丹亭等的蹤跡，亦有作者家族凋零、愛情悲劇的經驗，通過各種不同人物的話語和生命歷程，道出了封建社會大家族的腐敗和破落。紅樓夢的寫作影響了清代小說垂二百年。

西廂記和牡丹亭的每一段寫作和描述男女主角的手法都極為上乘，但是全書的結構則是一般的佳人才子寫法，由金瓶梅進步到紅樓夢則小處和全局俱佳。

這點與數學的發展極為相似，從局部的結構發展到大範圍的結構是近代數學發展的一個過程。往往通過比興的手法來處理。幾何學和數論都有這一段歷史，代數幾何學家在研究奇異點時通過爆炸的手段，有如將整個世界濃縮在一點。微分幾何和廣義相對論所見到的奇異點比代數流形複雜，但是也希望從局部開始，逐漸瞭解整體結構。數論專家研究局部結構時則通過素數的模方法，將算術流形變成有限域上的幾何，然後和大範圍的算術幾何對比，得出豐富的結果。數論學家在研究 Langlands 理論時也多從局部理論開始。

好的作品需要賦比興並用。鍾燦詩品：

「直書其事，寓言寫物，賦也。宏斯三義，酌而用之，幹之以風力，潤之以丹采，使味之者無極，聞之者動心，是詩之至也。若專用比興，則患在意深，意深則詞躓。若但用賦體，則患在意浮，意浮則文散。」

在數學上，對非線性微分方程和流體方程的深入瞭解，很多時需要靠計算機來驗算。很多數學家有能力做大量的計算，卻不從大處著想，沒有將計算的內容與數學其他分枝比較，沒有辦法得到深入的看法，反過來說只講觀念比較，不作大量計算，最終也無法深入創新。

有些工作卻包含賦比興三種不同的精義。近五十年來數論上一個偉大的突破是由英國人 Birch 和 Swinnerton-Dyer 提出的一個猜測，開始時用計算機大量計算，找出 L 函數和橢圓曲線的整數解的連繫，與數論上各個不同的分枝比較接合，妙不可言，這是賦比興都有的傳世之作。

四. 數學家對事物的看法的多面性

由於文學家對事物有不同的感受，同一事或同一物可以產生不同的吟咏。例如對楊柳的描述：

溫庭筠：

「柳絲長，春雨細 …」

吳文英：

「一絲柳，一寸柔情，料峭春寒中酒 …」

李白：

「年年柳色，灞陵傷別。」「風吹柳花滿座香，吳姬壓酒勸客嘗。」

周邦彥：

「柳陰直，煙裡絲絲弄碧，隋堤上，曾見幾番，拂水飄綿送行色 … 長亭路，年去歲來，應折柔條過千尺。」

晏幾道：

「舞低楊柳樓心月，歌盡桃花扇底風。」

柳枝既然是柔條，又有春天時的嫩綠，因此可以代表柔情，女性體態的柔軟（柳腰、柳眉都是用柳條來描寫女性），又可以描寫離別感情和青春的感覺。

對事物有不同的感受後，往往通過比興的方法另有所指，例如「美人」有多重意思，除了指美麗的女子外，也可以指君主：屈原九章「結微情以陳詞兮，矯以遺夫美人。」也可以指品德美好的人：詩經邶風：「云誰之思，西方美人。」蘇軾赤壁賦「望美人兮天一方」。

數學家對某些重要的定理，也會提出很多不同的證明。例如畢氏定理的不同證明有十個以上，等周不等式亦有五、六個證明，高斯則給出數論對偶定律六個不同的看法。不同的證明讓我們以不同的角度去理解同一個事實，往往引導出數學上不同的發展。

記得三十年前我利用分析的方法來證明完備而非緊致的正曲率空間有無窮大體積後，幾何學家 Gromov 開始時不相信這個證明，以後他找出我證明方法的幾何直觀意義後，發展出他的幾何理論，這兩個不同觀念都有它們的重要性。

小平邦彥有一個極為重要的貢獻叫做消滅定理，是用曲率的方法來得到的，它在代數幾何學上有奠基性的貢獻，代數幾何學家卻不斷的企圖找尋一個純代數的證明，希望對算術幾何有比較深入的瞭解。

對空間中的曲面，微分幾何學家會問它的曲率如何，有些分析學家希望沿著曲率方向來推動它一下看看有甚麼變化，代數幾何學家可以考慮它可否用多項式來表示，數論學家會問上面有沒有整數格點。這種種主觀的感受由我們的修養來主導。

反過來說，文學家對同一事物亦有不同的歌詠，但在創作的工具上，卻有比較統一的對仗韻律的講究，可以應用到各種不同的文體。從數學的觀點來說，對仗韻律是一種對稱，而對稱的觀念在數學發展至為緊要，是所有數學分枝的共同工具。另外，數學家又喜歡用代數的方法來表達空間的結構，同調群乃是重要的例子，由拓樸學出發而應用到群論、代數、數論和微分方程學上去。

五. 數學的意境

王國維在人間詞話說：

「詞以境界為最上。有境界則自成高格……有造境，有寫境，此理想與寫實二派之所由分。然二者頗難分別，因大詩人所造之境必合乎自然，所寫之境亦必鄰於理想故也。有有我之境，有無我之境。『淚眼問花花不語，亂紅飛過秋千去。』……有我之境也。『採菊東籬下，悠然見南山。』……無我之境也。有我之境，以我觀物，故物皆著我之色彩。無我之境，以物觀物，故不知何者為我，何者為物……無我之境，人唯乎靜中得之。有我之境，於由動入靜時得之，故一優美，一宏壯也。自然之物互相關係，互相限制。然其寫之於文學及美術中也，必有其關係限制之處。故雖寫實家亦理想家也。又雖如何虛構之境，其材料必求之於自然，而其構造亦必從自然之法律。故雖理想家亦寫實家也。」

數學研究當然也有境界的概念，在某種程度上也可談有我之境、無我之境，當年尤拉開創變分法和推導流體方程，由自然現象引導，可謂無我之境，他又憑自己的想像力研究發散級數，而得到 zeta 函數的種種重要結果，開三百年數論之先河，可謂有我之境矣。另外一個例子是法國數學家 Grothendieck，他著述極豐，以個人的哲學觀點和美感出發，竟然不用實例，建立了近代代數幾何的基礎，真可謂有我之境矣。

在幾何的研究中，我們發現狄拉克在物理上發現的旋子在幾何結構中有魔術性的能力，我們不知道它的內在的幾何意義，它卻替我們找到幾何結構中的精髓，在應用旋子理論時，我們常用的手段是通過所謂消滅定理而完成的，這是一個很微妙的事情，我們製造了曲率而讓曲率自動發酵去證明一些幾何量的不存在，可謂無我之境矣。以前我提出用 Einstein 結構來證明代數幾何的問題和用調和映射來看研究幾何結構的剛性問題也可作如是觀。

不少偉大的數學家，以文學、音樂來培養自己的氣質，與古人神交，直追數學的本源，來達到高超的意境。

文心雕龍·神思：

「文之思也，其神遠矣。故寂然凝慮，思接千載；悄然動容，視通萬里。吟詠之間，吐納珠玉之聲，眉睫之前，卷舒風雲之色，其思理之致乎。」

六. 數學的品評

好的工作應當是文已盡而意有餘，大部份數學文章質木無文，流俗所好，不過兩三年耳。但是有創意的文章，未必為時所好，往往十數年後始見其功。

我曾經用一個嶄新的方法去研究調和函數，以後和幾個朋友一同改進了這個方法，成為熱方程的一個重要工具。開始時沒有得到別人的讚賞，直到最近五年大家才領會到它的潛力。然而我們還是鏗而不捨地去研究，覺得意猶未盡。

我的老師陳省身先生在他的文集中引杜甫詩「文章千古事，得失寸心知。」而杜甫就曾批評初唐四傑的作品「王楊盧駱當時體，輕薄為文哂未休，爾曹身與名俱滅，不廢江河萬古流。」

時俗所好的作品，不必為作者本人所認同。舉個例子，白居易留傳至今的詩甚多，最出名之一是《長恨歌》，但他給元微之的信中卻說：

「及再來長安，又聞有軍使欲聘倡伎，伎大誇曰：『我誦得白學士《長恨歌》，豈同他伎哉。』… 諸伎見僕來，指而相顧曰：『此是《秦中吟》、《長恨歌》主耳。』自長安抵江西，三四千里… 每每有詠僕詩者，此誠雕蟲之技，不足為多，然今時俗所重，正在此耳。」

白居易說謝朓的詩麗而無諷。其實建安以後，綺麗為文的作者甚眾。亦自有其佳處，畢竟鍾燦評謝朓詩為中品，以後六朝駢文、五代花間集以至近代的鴛鴦蝴蝶派都是綺麗為文。雖未臻上乘，卻有賞心悅目之句。

數學華麗的作品可從泛函分析這種比較廣泛的學問中找到，雖然有其美麗和重要性，但與自然之道總是隔了一層。舉例來說，從函數空間抽象出來的一個重要概念叫做巴拿赫空間，在微分方程學有很重要的功用，但是以後很多數學家為了研究這種空間而不斷的推廣，例如有界算子是否存在不變空間的問題，確是漂亮，但在數學大流上卻未有激起任何波瀾。

在七十年代，高維拓樸的研究已成強弩之末，作品雖然不少，但真正有價值的不多，有如「野雲孤飛，去留無跡。」文氣已盡，再無新的比興了。當時有拓樸學者做群作用於流形的研究，確也得到某些人的重視。但是到了八零年代，值得懷念的工作只有 Bott 的局部化定理。

能經得起時間考驗的工作寥寥無幾，政府評審人材應當以此為首選。歷年來以文章篇數和被引用多寡來做指標，使得國內的數學工作者水平大不如人，不單與自然隔絕，連華麗的文章都難以看到。

七. 數學的演化

王國維說：

「四言敝而有楚辭，楚辭敝而有五言，五言敝而有七言，古詩敝而有律絕，律絕敝而有詞。蓋文體通行既久，染指遂多，自成習套。豪傑之士亦難於其中自出新意，故遁而作他體以自解脫。一切文體所以始盛中衰者，皆由於此，故謂文體後不如前，余未敢言。但就一體論，則此說固無以易也。」

數學的演化和文學有極為類似的變遷。從平面幾何至立體幾何，至微分幾何等等，一方面是工具得到改進，另一方面是對自然界有進一步的瞭解，將原來所認識的數學結構的美發揮盡致後，需要進入新的境界。江山代有人才，能夠帶領我們進入新的境界的都是好的數學。上面談到的高維拓樸文氣已盡，假使它能與微分幾何、數學物理和算術幾何組合變化，亦可振翼高翔。

我在香港唸數學時，讀到蘇聯數學家 Gelfand 的看法，用函數來描述空間的幾何性質，使我感觸良深。以後在研究院時才知道，代數幾何學家也用有理函數來定義代數空間，於是我猜想一般的黎曼流形應當也可以用函數來描述空間的結構。但是為了深入瞭解流形的幾何性質，我們需要的函數必需由幾何引出的微分方程來定義。可是一般幾何學家厭惡微分方程，我對它卻情有獨鍾，與幾個朋友合作將非線性方程帶入幾何學，開創了幾何分析這門學問，解決了拓樸學和廣義相對論一些重要問題。在一九八一年時我建議我的朋友 Hamilton 用他創造的方程去解決三維拓樸的基本結構問題，二十多年來他引進了不少重要的工具，運用上述我和李偉光在熱方程的工作，深入地瞭解奇異點的產生。兩年前俄國數學家 Perelman 更進一步地推廣了這個理論，很可能完成了我的願望，將幾何和三維拓樸帶進了新紀元。

八年前我訪問北京，提出全國向 Hamilton 先生學習的口號，本來討論班已經進行，卻給一些急功近利的北京學者阻止，在國外也遇到同樣的阻力，中國幾何分析不能進步都是由於年青學者不能夠自由發展思想的緣故。廣州的朱熹平卻鏗而不捨，他的工作已經遠超國內外成名的中國學者。

當一個大問題懸而未決的時候，我們往往以為數學之難莫過於此。待問題解決後，前途豁然開朗，看到比原來更為燦爛的火花，就會有不同的感受。這點可以跟莊子秋水篇比較：

「秋水時至，百川灌河，涇流之大，兩涘渚崖之間，不辯牛馬。于是焉河伯欣然自喜，以天下之美為盡在己，順流而東行，至于北海，東面而視，不見水端，于是焉河伯始旋其面目，望洋向若而嘆曰：『野語有之曰：『聞道百，以為莫已若者，我之謂也。且夫我嘗聞少仲尼之聞，而輕伯夷之義者，始吾弗信，今我睹子之難窮也。吾非至于子之門，則殆矣。吾長見笑于大方之家。』』」

科學家對自然界的瞭解，都是循序漸進，在不同的時空自然會有不同的感受。有學生略識之無後，不知創作之難，就連陳省身先生的大作都看不上眼，自以為見識更為豐富，不自見之患也。人貴自知，始能進步。

莊子：

「今爾出于崖溪，觀于大海，乃知爾醜，爾將可與語大理矣。」

我曾經參觀德國的葛庭根大學，看到十九世紀和廿世紀偉大科學家的手稿，他們傳世的作品只是他們工作的一部份，很多傑作都還未發表，使我深為慚愧而欽佩他們的胸襟。今人則不然，大量模仿，甚至將名作稍為改動，據為己有，儘快發表。或申請院士，或自炫為學術宗匠，於古人何如哉。

八. 數學的感情

爲了達到深遠的效果，數學家需要找尋問題的精華所在，需要不斷的培養我們對問題的感情和技巧，這一點與孟子所說的養氣相似。氣有清濁，如何尋找數學的魂魄，視乎我們的文化修養。

白居易說：

「聖人感人心而天下和平，感人心者，莫先乎情，莫始乎言，莫切乎聲，莫深乎義……未有聲入而不應，情交而不感者。」

嚴羽滄浪詩話：

「盛唐諸公唯在興趣，羚羊挂角，無跡可求。故其妙處透澈玲瓏，不可湊拍，如空中之音，相中之色，水中之影，鏡中之象，言有盡而意無窮。」

我的朋友 Hamilton 先生，他一見到問題可以用曲率來推動，他就眉飛色舞。另外一個澳洲來的學生，見到與愛因斯坦方程有關的幾何現象就趕快找尋它的物理意義，興奮異常，因此他們的文章都是清純可喜。反過來說，有些成名的學者，文章甚多，但陳陳相因，了無新意。這是對自然界、對數學問題沒有感情的現象，反而對名位權利特別重視。爲了院士或政協委員的名銜而甘願千里僕僕風塵地奔波，在這種情形下，難以想像他們對數學、對自然界有深厚的感情。

數學的感情是需要培養的，慎於交友才能夠培養氣質。博學多聞，感慨始深，堂廡始大。歐陽永叔：

「人間自是有情癡，此恨不關風與月。」「直須看盡洛城花，始與東風容易別。」

能夠有這樣的感情，才能夠達到晏殊所說：

「昨夜西風凋碧樹，獨上高樓，望盡天涯路。」

濃厚的感情使我們對研究的對象產生直覺，這種直覺看對象而定，例如在幾何上叫做幾何直覺。好的數學家會將這種直覺寫出來，有時可以用來證明定理，有時可以用來猜測新的命題或提出新的學說。

但數學畢竟是說理的學問，不可能極度主觀。詩經蓼莪、黍離，屈原離騷、九江，漢都尉河梁送別，陳思王歸藩傷逝，李後主憶江南，宋徽宗念故宮，俱是以血書成、直抒胸臆，非論證之學所能及也。

九. 數學的應用

王國維說：

「詩人對宇宙人生須入乎其內，又須出乎其外。入乎其內，故能寫之，出乎其外，故能觀之，入乎其內，故有生氣，出乎其外，故有高致。美成能入而不能出，白石以降，二事皆未夢見。」

「詞之雅鄭，在神不在貌。永叔少游雖作豔語，終有品格，方之美成，便有淑女與倡伎之別。」

數學除與自然相交外，也與人為的事物相接觸，很多數學問題都是純工程上的問題。有些數學家畢生接觸的都是現象界的問題，可謂入乎其內。大數學家如尤拉、如富里哀、如高斯、如維納、如馮紐曼等都能入乎其內，出乎其外，既能將抽象的數學在工程學上應用，又能在實用的科學中找出共同的理念而發展出有意義的數學。反過來說，有些應用數學家只用計算機作出一些計算，不求甚解，可謂二者皆未見矣。

富里哀在研究波的分解時，得出富里哀級數的展開方法，不但成為應用科學最重要的工具，在基本數學上的貢獻也是不可磨滅的。近代孤立子的發展和幾何光學的研究，都在基本數學上佔了一個重要的位置。

應用數學對基本數學的貢獻可與元劇比較。王國維評元劇：

「其作劇也，非有藏之名山，傳之其人之意也，彼以意興之所至為之，以自娛娛人，關目之拙劣，所不問也；思想之卑陋，所不諱也；人物之矛盾，所不顧也。彼但摹寫其胸中之感想與時代之情狀，而真摯之理與秀傑之氣時流露于其間。」

例如金融數學旨在謀利，應用隨機過程理論，間有可觀的數學內容。正如王國維評古詩「何不策高足，先據要路津，無為久貧賤，輾軻長苦辛。」認為「無視其鄙者，以其真也。」偉大的數學家高斯就是金融數學的創始人，他本人投資股票而獲利，Klein 則研究保險業所需要的概率論。

然而近代有些應用數學家以爭取政府經費為唯一目標，本身無一技之長，卻巧立名目，反誣告基本數學家對社會沒有貢獻，盡失其真矣。有如近代小說以情慾、仇殺、奸詐為主題，取寵于時俗，不如太史公刺客列傳中所說：

「自曹沫至荊軻五人，此其義或成或不成，然其立意較然，不欺其志，名垂後世，豈妄也哉。」

應用數學家不能立意較（較）然，而妄談對社會有貢獻，恐怕是緣木求魚了。

十. 數學的訓練

好的數學家需要領會自然界所賦予的情趣，因此也須向同道學習他們的經驗。然而學習太過，則有依傍之病。顧亭林云：

「君詩之病在於有杜，君文之病在於有韓，歐。有此蹊徑於胸中，便終身不脫依傍二字，斷不能登峰造極。」

今人習數學，往往依傍名士，凡海外畢業的留學生，都為佳士，孰不知這些名士泰半文章與自然相隔千萬里，畫虎不成反類犬矣。李義山：

「劉郎已恨蓬山遠，更隔蓬山一萬重。」

很多研究生在跟隨名師時，做出第一流的工作，畢業後卻每況愈下，就是依傍之過。更有甚者，依傍而不自知，由導師提攜指導，竟自炫「無心插柳柳成蔭」，難有創意之作矣。

有些學者則倚洋自重，國外大師的工作已經完成，除非另有新意，不大可能再進一步發展。國內學者繼之，不假思索，頂多能夠發表一些二三流的文章。極值理論就是很好的例子。由 Birkhoff, Morse 到 Nirenberg 發展出來的過山理論，文意已盡，不宜再繼續了。

推其下流，則莫如抄襲，有成名學者為了速成，帶領國內學者抄襲名作，竟然得到重視，居廟堂之上，腰纏萬貫而沾沾自喜，良可嘆也。

數學家如何不依傍才能做出有創意的文章？

屈原說：

「紛吾既有此內美兮，又重之以修能。」

如何能夠解除名利的束縛，俾欣賞大自然的直覺毫無拘束地表露出來，乃是數學家養氣最重要的一步。

賈誼：

「獨不見夫鸞鳳之高翔兮，乃集大皇之野。循四極而回周兮，見盛德而後下。彼聖人之神德兮，遠濁世而自藏。使麒麟可得羈而係兮，又何以異乎犬羊。」

媒體或一般傳記作者喜歡說某人是天才，下筆成章，彷彿做學問可以一蹴而就。其實無論文學和數學，都需要經過深入的思考才能產生傳世的作品。柳永：

「衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴。」

一般來說，作者經過長期浸淫，才能夠出口成章，經過不斷推敲，才有深入可喜的文采。王勃滕王閣序，麗則麗矣，終不如陶淵明歸去來辭、庾信哀江南賦、曹植洛神賦諸作來得結實。文學家的推敲在於用字和遣辭。張衡兩京、左思三都，構思十年，始成巨構，聲聞後世，良有以也。數學家的推敲極為類似，由工具和作風可以看出他們特有的風格。傳世的數學創作更需要有宏觀的看法，也由鍛鍊和推敲才能成功。

曹丕：

「古人賤尺璧而重寸陰，懼乎時之過已，而人多不強力；貧賤則懼於飢寒，富貴則流於逸樂，遂營目前之務，而遺千載之功。日月逝於上體貌衰於下。忽然於萬物遷化，斯志士之大痛也。」

三十年來我研究幾何空間上的微分方程，找尋空間的性質，究天地之所生，參萬物之行止。樂也融融，怡然自得，溯源所自，先父之教乎。

—本文作者為中央研究院院士，目前任教於美國哈佛大學數學系—