與旁切圓半徑有關的四個幾何性質

丁遵標

摘要: 本文將給出四個旁切圓半徑不等式的最佳形式。

關鍵詞: 三角形、半周長、外接圓半徑、內切圓半徑、旁切圓半徑。

本文約定: a, b, c: $\triangle ABC$ 的三邊長, p: 半周長, R: 外接圓半徑, r: 內切圓半徑, S: 面積, r_a, r_b, r_c: 旁切圓半徑。

匡繼昌教授編著的「常用不等式」一書出版後, 美國 "數學評論"(MR)、德國 "數學文摘" 和中國多家報刊雜誌給出很高的評價, 指出這是 "一本很有價值和受歡迎的數學不等式文獻", 在該文獻中, 共收錄了31個旁切圓半徑不等式, 其中有下面的4個不等式:

4. (1) $\quad 9r \le \sqrt{3}p \le r_a + r_b + r_c \le \dfrac{9}{2}R$

(2) $\quad r_a + r_b + r_c \ge \dfrac{3}{2}(3-\sqrt{3})r$

(3) $\quad r_a + r_b + r_c > 4R$

17. (1) $\quad 4 \le 4\left(\dfrac{\sqrt{2pR}}{3^{\frac{3}{4}}r} - 1\right) \le \dfrac{a^2}{r_br_c} + \dfrac{b^2}{r_cr_a} + \dfrac{c^2}{r_ar_b} \le \dfrac{6\sqrt{3}R^2}{pr} - 4$

(2) $\quad \dfrac{a^2}{r_br_c} + \dfrac{b^2}{r_cr_a} + \dfrac{c^2}{r_ar_b} \ge \dfrac{2R}{r}$

22. $\quad \dfrac{a^2}{r_a - r} + \dfrac{b^2}{r_b - r} + \dfrac{c^2}{r_c - r} \le 9R$

27. $\quad 6r \le \dfrac{a^2}{r_b + r_c} + \dfrac{b^2}{r_c + r_a} + \dfrac{c^2}{r_a + r_b} \le \dfrac{3}{r}(3R^2 - 10r^2)$

筆者在學習探討之餘, 發現了匡教授編著的文獻中上面的四個不等式的最佳形式, 現提出來, 與匡教授進行商榷, 並與廣大讀者共同探討。

定理: (1) $\quad r_a + r_b + r_c = 4R + r$

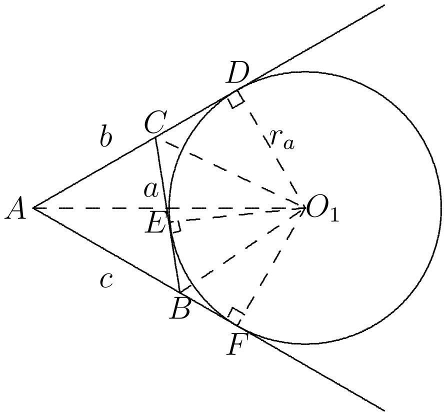
(2) $\quad \dfrac{a^2}{r_br_c} + \dfrac{b^2}{r_cr_a} + \dfrac{c^2}{r_ar_b} = \dfrac{4R}{r} - 4$

(3) $\quad \dfrac{a^2}{r_a - r} + \dfrac{b^2}{r_b - r} + \dfrac{c^2}{r_c - r} = 8R + 2r$

$$(4) \qquad \frac{a^2}{r_b+r_c}+\frac{b^2}{r_c+r_a}+\frac{c^2}{r_a+r_b}=4R-2r$$

爲證明上述定理, 先看下面的引理:

引理: 若 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 a、b、c, 半周長爲 P, 面積爲 S, 旁切圓半徑分別爲 r_a、r_b、r_c, 則有: $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$



證明: 設旁切圓 O_1 與 AB、AC、BC 所在的直線分別相切於 F、D、E, 連結 O_1A、O_1B、O_1C、O_1D、O_1E、O_1F,

則 $\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AO_1C}+S_{\triangle BO_1C}-S_{\triangle BO_1C}$

即
$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}br_a+\frac{1}{2}cr_a-\frac{1}{2}ar_a=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a=\frac{1}{2}(2p-2a)r_a\\ &=(p-a)r_a \end{aligned}$$

同理: $\qquad S=(p-b)r_b, \quad S=(p-c)r_c.$

而後同理之對稱式就不重複。

下面, 在引理的基礎上, 我們來進一步證明文中提出的四個幾何性質, 首先對證明時所需的性質進行論證。請看:

證明: 由引理及 $S=rp$ 便可得到

$$(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=rp$$
$$\therefore\ r_a=\frac{rp}{p-a}, \quad r_b=\frac{rp}{p-b}, \quad r_c=\frac{rp}{p-c}, \tag{1}$$

再由海倫公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 及 $S=rp$ 便又可得到:

$$(p-a)(p-b)(p-c)=r^2p \tag{2}$$

又 $\because\ ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2$, 讀者想了解其證明過程, 可參考文 [2]。

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}&=\frac{ab+bc+ca-p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}\\&=\frac{p^2+4Rr+r^2-p^2}{r^2p}&&(\text{由 }(2))\\&=\frac{4R+r}{rp}\end{aligned}\tag{3}$$

在此基礎上, 就很容易給出它們的證明了。

(1)
$$\begin{aligned}r_a+r_b+r_c&=\frac{rp}{p-a}+\frac{rp}{p-b}+\frac{rp}{p-c}&&(\text{由 }(1))\\&=rp\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\\&=rp\frac{4R+r}{rp}&&(\text{由 }(3))\\&=4R+r\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\because\ \frac{a^2}{r_br_c}&=\frac{a^2}{\frac{rp}{p-b}\cdot\frac{rp}{p-c}}&&(\text{由 }(1))\\&=\frac{a^2(p-b)(p-c)}{r^2p^2}\\&=\frac{a^2(p-a)(p-b)(p-c)}{r^2p^2(p-a)}\\&=\frac{a^2r^2p}{r^2p^2(p-a)}&&(\text{由 }(2))\\&=\frac{a^2}{p(p-c)}=\frac{p}{p-a}-\frac{a}{p}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a^2}{r_br_c}+\frac{b^2}{r_cr_a}+\frac{c^2}{r_ar_b}&=\left(\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}\right)-\frac{a+b+c}{p}-3\\&=p\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)-\frac{2p}{p}-3\\&=p\cdot\frac{4R+r}{rp}-5&&(\text{由 }(3))\\&=\frac{4R}{r}-4\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\because\frac{a^2}{r_a-r}&=\frac{a^2}{\frac{rp}{p-a}-r}&&(\text{由 }(1))\\&=\frac{a^2(p-a)}{rp-r(p-a)}=\frac{a^2(p-a)}{ar}=\frac{ap-a^2}{r}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{又} \because\quad a^2+b^2+c^2 &= 2(p^2-4Rr-r^2)\\
\therefore \frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r}&\\
&= \frac{ap-a^2}{r}+\frac{bp-b^2}{r}+\frac{cp-c^2}{r}\\
&= \frac{(a+b+c)p-(a^2+b^2+c^2)}{r}\\
&= \frac{2p^2-2(p^2-4Rr-r^2)}{r}\\
&= 8R+2r
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\because \frac{a^2}{r_b+r_c} &= \frac{a^2}{\frac{rp}{p-b}+\frac{rp}{p-c}} && (\text{由 } (1))\\
&= \frac{a^2(p-b)(p-c)}{rp(2p-b-c)} = \frac{a^2(p-b)(p-c)}{arp}\\
&= \frac{a^2(p-a)(p-b)(p-c)}{arp(p-a)}\\
&= \frac{a^2r^2p}{arp(p-a)} && (\text{由 } (2))\\
&= \frac{ar}{p-a}\\
\therefore \frac{a^2}{r_b+r_c}+\frac{b^2}{r_c+r_a}+\frac{c^2}{r_a+r_b}&\\
&= \frac{ar}{p-a}+\frac{br}{p-b}+\frac{cr}{p-c}\\
&= r\left(\frac{p}{p-a}-1\right)+r\left(\frac{p}{p-b}-1\right)+r\left(\frac{p}{p-c}-1\right)\\
&= rp\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)-3r\\
&= rp\cdot\frac{4R+r}{rp}-3r && (\text{由 } (3))\\
&= 4R-2r
\end{aligned}
$$

參考文獻

1. 匡繼昌, 常用不等式 [M], 山東科學技術出版社, 2004年1月第3版: 224～226。
2. 丁遵標, 與三角形高有關的幾何性質, 數學傳播, 29卷2期, 頁55-60。

—本文作者任教於中國安徽省舒城縣杭埠中學—