一道數學競賽題的一般形式及其應用

蘇化明・寧榮健・潘　杰

摘要: 給出了北京市大學生數學競賽一道試題的一般形式並舉例說明其應用。

關鍵詞: 數列, 函數, 方程, 極限, 單調函數, 一致收斂, 級數。

第6屆北京市大學生 (非數學專業) 數學競賽 (1994年) (可參閱 [1]) 有這樣一道試題:

設 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明:

(i) 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 內有唯一的實根 x_n;

(ii) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

文 [2] 對同一問題則給出了如下結論:

(a) 方程 $f_n(x)=1$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 內只有一個根;

(b) 設 $x_n\in(\frac{1}{2},1)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$。

本文首先給出這一問題的一般性結論, 即如下的

定理: 設函數 $f(x)$ 的馬克勞林 (Maclaurin) 展開式的收斂域爲 I, 實數 α,β 滿足 $\alpha<\beta$ 且 $[\alpha,\beta]\subset I$。令 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, 若 $f(x)$ 及 $P_n(x)$ 在 (α,β) 內爲嚴格單調函數, 且對於給定的實數 λ, $P_n(\alpha)-\lambda$ 與 $P_n(\beta)-\lambda$ 異號, 則有

(1) 方程 $P_n(x)=\lambda$ 在 (α,β) 內有唯一實根 x_n;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=f^{-1}(\lambda)$, 其中 f^{-1} 表示 f 的反函數。

爲了證明定理, 我們首先介紹如下的

引理 [阿貝爾 (Abel) 第二定理]: 設冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收斂半徑爲 R, 則

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 上內閉一致收斂, 即在任意閉區間 $[a,b]\subset(-R,R)$ 上一致收斂;

(ii) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$ 收斂, 則它在任意閉區間 $[a,R]\subset(-R,R]$ 上一致收斂。

此引理的證明可見 [3]。

定理的證明:

(1) 因爲 $P_n(\alpha)-\lambda$, $P_n(\beta)-\lambda$ 異號, 又顯然 $P_n(x)-\lambda$ 爲 $[\alpha,\beta]$ 上的連續函數, 故由閉區間上連續函數的性質知方程 $P_n(x)=\lambda$ 在 (α,β) 內至少有一個實根。又 $P_n(x)$ 在 (α,β)

內爲嚴格單調函數, 所以方程 $P_n(x)=\lambda$ 在 (α,β) 內有且僅有一個實根 x_n。

(2) 令 $f(x)-P_n(x)=R_n(x)$, 由 $x_n\in(\alpha,\beta)$ 知

$$f(x_n)-R_n(x_n)=P_n(x_n)=\lambda.$$

由前面的引理知 $\{P_n(x)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收斂於 $f(x)$, 從而在 $[\alpha,\beta]$ 上 $\{R_n(x)\}$ 一致收斂於0。由於 $|R_n(x_n)|\le\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|R_n(x)|$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|R_n(x)|=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x_n)=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$。又因爲 $f(x)$ 是 (α,β) 內嚴格單調的連續函數, 故 $f^{-1}(x)$ 也爲連續函數, 所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f^{-1}(f(x_n))=f^{-1}(\lim_{n\to\infty}f(x_n))=f^{-1}(\lambda).$$

對於本文開始的問題, 可取 $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k(1-<x<1)$, $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=f_n(x)+1$, $\lambda=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{9}{10}$, $[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$, 當 $n\ge2$ 時,

$$\begin{aligned}P_n\left(\frac{1}{2}\right)-2&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1<0,\\ P_n\left(\frac{9}{10}\right)-2&=\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^n-1>0,\end{aligned}$$

又當 $x\in(\frac{1}{2},\frac{9}{10})$ 時, $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$, $P'_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}kx^{k-1}>0$, 從而 $f(x)$, $P_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},\frac{9}{10})$ 內嚴格單調遞增, 所以 $P_n(x)=2$, 即 $f_n(x)=1$ 在 $(\frac{1}{2},\frac{9}{10})$ 內有唯一實根 x_n。

又 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x}$, $f^{-1}(2)=\frac{1}{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

由於 $(\frac{1}{2},\frac{9}{10})\subset(\frac{1}{2},1)\subset[0,+\infty)$, 因此前面的結論均成立。

下面再舉幾個例子說明這一定理的應用。

例1: 設 $g_n(x)=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明: 方程 $g_n(x)=1$ 在 $(0,1)$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln2$。

證明: 在已證的定理中取 $f(x)=e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}(-\infty<x<+\infty)$, $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=g_n(x)+1$, $\lambda=2$, $\alpha=0$, $\beta=1$。

因爲 $P_n(0)-2=-1<0$, $P_n(1)-2=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}>0$, 又當 $x\in(0,1)$ 時, $f'(x)=e^x>0$, $P'_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}>0$, 從而 $f(x)$, $P_n(x)$ 在 $(0,1)$ 內嚴格單調遞增, 所以 $P_n(x)=2$, 即 $g_n(x)=1$ 在 $(0,1)$ 內有唯一實根 x_n。

由於 $f^{-1}(x)=\ln x$, $f^{-1}(2)=\ln2$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln2$。

例2: 設 $h_n(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$, 證明: 方程 $h_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{e-1}{e+1}$。

證明: 在已證的定理中取 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}(-1<x<1)$, $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=h_n(x)$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$。

因爲 $P_n(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$, $P_n(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\cdots+\frac{1}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}>0$, 又當 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 時, $f'(x)=\frac{1}{x}>0$, $P_n'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^{2k}>0$, 從而 $f(x)$, $P_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內嚴格單調遞增, 所以 $h_n(x)=P_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(1,\frac{1}{2})$ 內有唯一實根 x_n。

又 $f^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $f^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{e-1}{e+1}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{e-1}{e+1}$。

例3: 設 $r_n(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ $(n=2,3,\ldots)$。證明: 方程 $r_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2-\sqrt{3}$。

證明: 在已證的定理中取 $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k(-1<x<1)$, $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}kx^k=r_n(x)$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$。

因爲 $P_n(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$, $P_n(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}>0$, 又當 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 時, $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1-x)^4}>0$, $P_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}>0$, 從而 $f(x)$, $P_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內嚴格單調遞增, 所以 $r_n(x)=P_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內有唯一實根 x_n。

又 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2x}[2x+1-\sqrt{4x+1}]$, $f^{-1}(\frac{1}{2})=2-\sqrt{3}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2-\sqrt{3}$。

例4: 設 $u_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1}$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明: 方程 $u_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\frac{3}{4})$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$。

證明: 在已證的定理中取 $f(x)=\sin x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-\infty<x<+\infty)$, $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=u_n(x)$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{3}{4}$。

因爲 $P_n(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$,

$$P_n\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1}>0,$$

又當 $x\in(0,\frac{3}{4})$ 時,

$$f'(x)=\cos x>0,\quad P_n'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}>0,$$

從而 $f(x)$, $P_n(x)$ 在 $(0,\frac{3}{4})$ 內嚴格單調遞增, 所以 $u_n(x)=P_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\frac{3}{4})$ 內有唯一實根。

又 $f^{-1}(x)=\arcsin x$, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$。

例5: 設 $v_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明: 方程 $v_n(x)=\frac{1}{3}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{\frac{1}{3}}-1$。

證明: 在已證的定理中取 $f(x)=\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}(-1<x\le 1)$, $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}=v_n(x)$, $\lambda=\frac{1}{3}$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$。

因爲 $P_n(0)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0$, $P_n\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}>0$, 又當 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 時, $f'(x)=\frac{1}{1+x}>0$, $P_n'(x)=1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1-(-1)^nx^n}{1+x}>0$, 從而 $f(x)$, $P_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 內嚴格單調遞增, 所以 $v_n(x)=P_n(x)=\frac{1}{3}$ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 內有唯一實根。

又 $f^{-1}(x)=e^x-1$, $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=e^{\frac{1}{3}}-1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{\frac{1}{3}}-1$。

我們最後再給出幾個類似問題, 供讀者練習。

問題1: 設 $F_n(x)=x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明: 方程 $F_n(x)=1$ 在 $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-e^{-1}$。

問題2: 設 $G_n(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明: 方程 $G_n(x)=1$ 在 $(0,1)$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln(1+\sqrt{2})$。

問題3: 設 $S_n(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ $(n=2,3,\ldots)$, 證明: 方程 $S_n(x)=\frac{\pi}{6}$ 在 $(0,1)$ 內有唯一實根 x_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

參考文獻

1. 李心燦等, 大學生數學競賽試題, 研究生人學數學考試難題解析選編。北京: 高等教育出版社, 2000。
2. 林源渠、方企勤, 數學分析解題指南。北京: 北京大學出版社, 2003。
3. 陳紀修、於崇華、金路, 數學分析 (第二版, 下册)。北京: 高等教育出版社, 2004。
4. 呂通慶, 一致連續與一致收斂。北京: 人民教育出版社, 1981。

—本文作者任教於安徽省合肥工業大學數學與信息科學系—