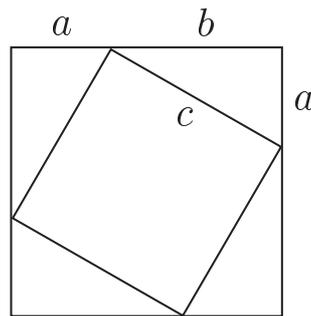


面積關係與相似形基本定理

張海潮 周盈吟

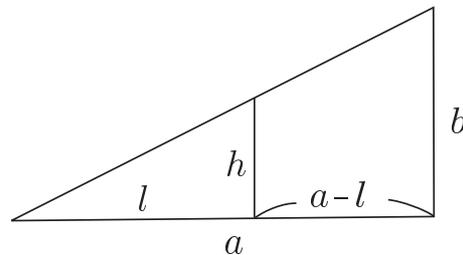
中國人稱畢氏定理為勾股 (弦) 或商高定理。傳統上, 勾股定理的證明是利用四個一樣的直角三角形依序排成一個大正方形, 中間空出一個小正方形, 然後利用面積關係得出「勾股各自乘, 並而開方除之, 即弦」。(見圖一及註一)



圖一

本文想用類似的方法, 以面積關係得出相似形的基本定理 — 對應角相等的兩個三角形, 其對應邊長成比例。

我們只看直角三角形 (圖二)



圖二

因為大直角三角形和小直角三角形面積之差是一個梯形, 以面積公式表出:

$$ab - lh = (a - l)(h + b)$$

展開消去, 得出

$$0 = ah - lb$$

或者

$$\frac{h}{b} = \frac{l}{a}$$

此即勾股之比相等; 若再引用勾股定理則可得到弦長之比與亦勾股之比相等。

本文證明與歐氏“原本”卷六命題二的證明類似, 不過更加直接; 並且可以在定義三角函數之前作為複習之用, 幫助學者了解三角函數確是角的函數, 與直角三角形的邊長無關。

註一. 圖一首見於周髀算經趙君卿注, 引文則出自九章算術卷九「勾股」。

勾股定理的證明來自大, 小正方形面積之差為四個直角三角形, 亦即

$$(a + b)^2 - c^2 = 2ab$$

展開消去得出

$$a^2 + b^2 = c^2$$

—本文作者張海潮為台大數學系退休教授, 周盈吟為高中實習老師—