「三等分角」與「特殊方程式求解」

姜添恭 · 鄭昌源

摘要: 一百多年前已有數學家證明無法以尺規作圖法處理著名的「三等分角問題」; 在其探討過程中, 卻留下了許多的相關結果。此篇工作主要在於推廣卡爾丹公式求解三次多項式方程式的方法, 以求解特殊的奇次多項式; 並且以「三等分角問題」所引發的相關概念探究一般奇次多項式方程式的近似值解。

一. 前言

「三等分角問題」(trisection of an angle) 是早在二千四百年前, 古希臘人提出的幾何三大作圖問題之一。衆所周知, 1837年數學家凡齊爾已運用代數方法證明了無法以「尺規作圖法」將一個已知角三等分。在此期間, 因爲研究「三等分角問題」而產生的許多相關或間接相關結果卻意外地豐富了這片學術園地。我們也是因爲對此問題的再次探究而發現一些特殊方程式的特別解, 進而推廣爲一般奇次多項式方程式的近似值解。

二. 卡爾丹公式 (Cardan formula)

對於一個一般的三次 (cubic) 多項式方程式,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

其中 a, b, c, d, 爲實數, 且 $a \neq 0$, 數學家早在十六世紀已能完整解出此方程式的一般解。其方法爲: 令 $y = x + \frac{b}{3a}$, 則可得

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \tag{1}$$

其中,

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}, \quad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

應用卡爾丹公式, 可得方程式 (1) 有解:

$$y_1 = u + v, \qquad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \qquad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

其中,

$$u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},\qquad v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

且 ε_1 與 ε_2 爲方程式 $x^2+x+1=0$ 之解, 即 $\varepsilon_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。對於三次多項式方程式, 前人已有如此明確的解法, 我們有興趣的是將此概念推廣至更高次的多項式方程式。

三. 高次多項式方程式

3.1. 三等分角的靈感

對於一個角 θ, $0^\circ<\theta<360^\circ$, 雖然無法以尺規作圖法將其三等分; 但, 其三等分角後的幾何圖形可以提供我們在特殊三次多項式方程式的求解法。在此, 我們分 (1) $0^\circ<\theta<180^\circ$、(2) $180^\circ<\theta<360^\circ$ 分別探討其三等分角後的幾何圖形。

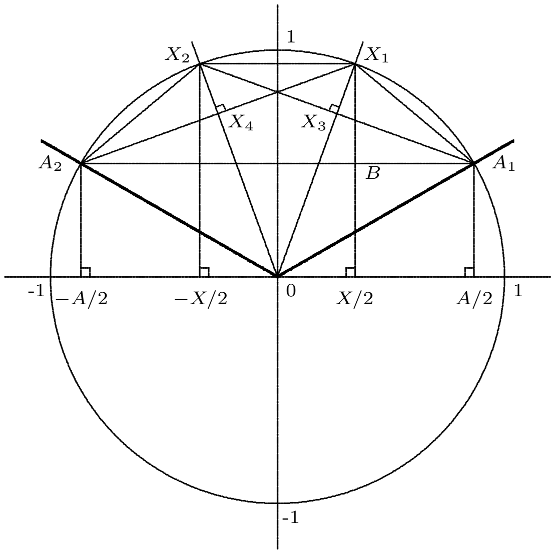

圖 1

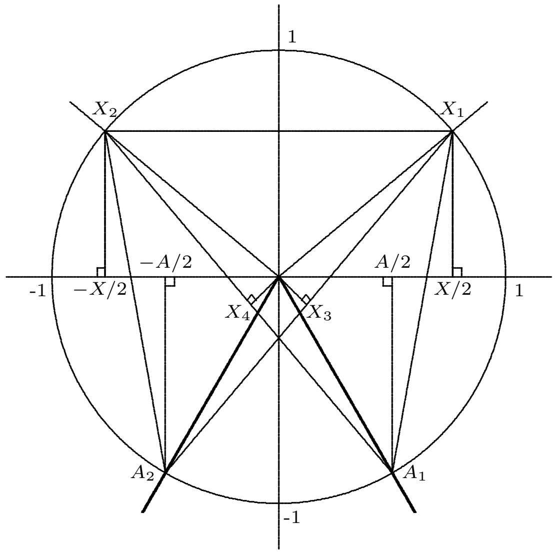

圖 2

(1) $0^\circ<\theta<180^\circ$: 圖 (1) 中, 圓的半徑均爲1, 角 θ 的兩邊分別交圓於點 A_1 及點 A_2, 使線段 $\overline{A_1A_2}$ 平行 x 軸, 且兩條三等分角線分別交圓於點 X_1 及點 X_2, 令 $\alpha=\overline{A_1A_2}$、$\beta=\overline{X_1X_2}$。可知, $\triangle A_1OX_1$、$\triangle X_1OX_2$、$\triangle X_2OA_2$ 爲三個腰長爲1、底長爲 β 的全等等腰三角形, 由餘弦定理可知

$$\overline{X_1X_3}=\overline{X_2X_4}=\frac{\beta^2}{2};$$

且由畢氏定理可得

$$\overline{A_1X_3}=\overline{X_2X_3}=\overline{X_1X_4}=\overline{X_4A_2}=\sqrt{\beta^2-\frac{\beta^4}{4}}\ ,$$

$$\overline{A_1X_2}=\overline{A_2X_1}=2\sqrt{\beta^2-\frac{\beta^4}{4}}=\sqrt{4\beta^2-\beta^4}.$$

由 $\overline{A_1B}=\overline{A_1X_1}\times\cos\angle X_1A_1A_2$ 及餘弦定理可得

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_1X_1}^2-\overline{X_1A_2}^2}{2\times\overline{A_1A_2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2(\sqrt{4\beta^2-\beta^4})^2}{2\alpha}=\frac{\alpha^2-3\beta^2+\beta^4}{2\alpha};$$

進一步可得 $\beta^3-3\beta+\alpha=0$。也就是說, 三等分角之後的圖 (1) 中, 若 $\alpha=\overline{A_1A_2}$、$\beta=\overline{X_1X_2}$, 則長度 β 爲三次多項式方程式

$$x^3-3x+\alpha=0$$

的解。假若我們再引用卡爾丹公式即可得 β 以 α 表示之形式解:

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2-1}}-\sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}-\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2-1}}.$$

(2) $180^\circ<\theta<360^\circ$: 同理, 若圖 (2) 中 $\alpha=\overline{A_1A_2}$、$\beta=\overline{X_1X_2}$ 則可得:

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2-1}}-\sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}+\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2-1}}.$$

3.2. 五次特別方程式

在前一節中我們引用卡爾丹公式解決三次多項式方程式; 本節主要在於推廣其方法至五次特別方程式。對於一個五次的特別方程式

$$x^5+5bx^3+5dx+c=0. \tag{2}$$

類似卡爾丹公式的求解方法, 令

$$x=u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}},\ \text{得}\ (u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})^5+5b(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})^3+5d(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})+c=0.$$

展開五次方項可得

$$\begin{aligned}
u^3+v^3+5u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{3}{5}}(u^{\frac{9}{5}}+2u^{\frac{6}{5}}v^{\frac{3}{5}}+2u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{6}{5}}+v^{\frac{9}{5}})+5b(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})^3+5d(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})+c=0,\\
u^3+v^3+5u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{3}{5}}[(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})^3-u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{3}{5}}(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})]+5b(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})^3+5d(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})+c=0,\\
u^3+v^3+5(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})^3[u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{3}{5}}+b]+5(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}})[d-u^{\frac{6}{5}}v^{\frac{6}{5}}]+c=0.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{3}{5}}+b=0,\\ d-u^{\frac{6}{5}}v^{\frac{6}{5}}=0,\end{cases}$$

則得 $u^3+v^3+c=0$ 及 $d=b^2$。於是 (2) 式成爲

$$x^5+5bx^3+5b^2x+c=0. \tag{3}$$

由 $u^3+v^3=-c$ 及 $u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{3}{5}}=-b$ 得

$$(u^3-v^3)^2=(u^3+v^3)^2-4u^3v^3=c^2+4b^5.$$

因此, $u^3-v^3=\pm\sqrt{c^2+4b^5}$。取正值可得

$$u^3=\frac{1}{2}[-c+\sqrt{c^2+4b^5}],\qquad v^3=\frac{1}{2}[-c-\sqrt{c^2+4b^5}],$$

即

$$u^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{-\frac{c}{2}+\sqrt{(\frac{c}{2})^2+b^5}},\qquad v^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{-\frac{c}{2}-\sqrt{(\frac{c}{2})^2+b^5}}.$$

於是解得 (3) 式之一組解爲

$$x=u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{3}{5}}.$$

若令 $s=u^{\frac{3}{5}}$, $t=v^{\frac{3}{5}}$, 則可證得另外四組解爲

$$\omega s+\omega^4t,\ \omega^2s+\omega^3t,\ \omega^3s+\omega^2t,\ \omega^4s+\omega t.$$

其中,

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$$

爲 $1+x+x^2+x^3+x^4=0$ 之一根。

註一: 當 $(\frac{c}{2})^2+b^5\le 0$ 時, 式子 (3) 有五個實根。當 $(\frac{c}{2})^2=b^5=0$ 時, 式子 (3) 有五重根0。當 $(\frac{c}{2})^2+b^5>0$ 時, 式子 (3) 有一實根及四複數根。

註二: 對類似於式子 (3) 的更高次的特殊奇次多項式方程式 (七次、九次、十一次、$\cdots$) 我們也能找到其解; 如七次特殊多項式方程式

$$x^7+7bx^5+14b^2x^3+7b^3x+e=0,$$

我們有解爲:

$$x_1=u+v,\quad x_2=\omega u+\omega^6v,\quad x_3=\omega^6u+\omega^1v,\quad x_4=\omega^2u+\omega^5v,$$
$$x_5=\omega^5u+\omega^2v,\quad x_6=\omega^3u+\omega^4v,\quad x_7=\omega^4u+\omega^3v,$$

其中,

$$u=\sqrt[7]{-\frac{e}{2}+\sqrt{(\frac{e}{2})^2+b^7}},\quad v=\sqrt[7]{-\frac{e}{2}-\sqrt{(\frac{e}{2})^2+b^7}},\quad \omega^7=1.$$

—本文作者姜添恭爲自由業工作者, 鄭昌源爲台南縣國小教師—