「動力系統」的理論及數值模擬

杜寶生 · 周謀鴻

有人說, 在二十世紀, 人類有三大發現, 那就是相對論, 量子力學以及混沌理論, 而混沌理論是動力系統的一支, 動力系統又是非線性科學的一門。由於上個世紀末葉非線性科學的蓬勃發展, 使得人類自古以來所認爲最永恆的自然現象 — 定態及週期性, 多加了兩位新成員 — 擬週期性及混沌。在此之前, 科學家們對這兩種新增的現象並不陌生, 只是苦於無法掌握到一個確切的描述, 如前兩者那樣:「獨立而不改, 週行而不殆」(本文有三處借用老子「道德經」中的語句, 言簡意賅)。隨著動力系統研究的演進, 確定在很多看似簡單的機制下都能見到這兩位新成員的本尊, 從而引發更多數學理論的建立及一系列透過電腦的數值模擬, 大大地提升了「擬週期性及混沌」在科學現象中的正統性。現在從事動力系統研究的, 不只包括數學家, 物理學家, 還包括了化學家, 生物學家, 經濟學家, 氣象學家等。動力系統說難是難, 但對動力系統理論有興趣的讀者, 也不要因此被嚇跑, 因爲它也有簡單的部份, 只要稍懂一些初等微積分, 就能大致瞭解這些人在做些什麼。由於這個領域還在發展當中, 有些概念, 就像混沌概念, 還未定型, 說不定您有奇想或靈感, 也能貢獻一些。以下我們先以直線上離散動力系統爲例, 做些簡介。

直線上離散動力系統的定義很簡單: 假設 f 是一個從實數集對應到實數集的連續函數, 隨便取一個實數 c, 我們可以計算 $f(c)$, $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$, $\ldots$, 等等。爲方便計, 我們令 $f^2(c)$ 代表 $f(f(c))$, 令 $f^3(c)$ 代表 $f(f(f(c)))$ 等等。離散動力系統的一個研究課題就是: 我們能夠描述實數列 c, $f(c)$, $f^2(c), \ldots, f^n(c), \ldots$ 當 n 很大時的終極表現嗎? 這通常有兩種可能, 一種是: 太複雜了, 我們無法描述, 這是屬於混沌的範疇; 另一種是: $f^n(c) = c$, 也就是說, c 對 f 疊代 n 次後會回到 c 自己, 我們稱這種點爲週期點, 並稱滿足這個方程式 $f^n(c) = c$ 的最小正整數 n 爲 c (對 f) 的週期。對一般的動力系統, 週期點的存在與否, 是一個很吸引人的問題, 因爲它代表了規律性。就這一部份, 我們有如下的沙可夫斯基定理。其條件之簡要, 結果之豐富, 堪稱數學定理的典範。

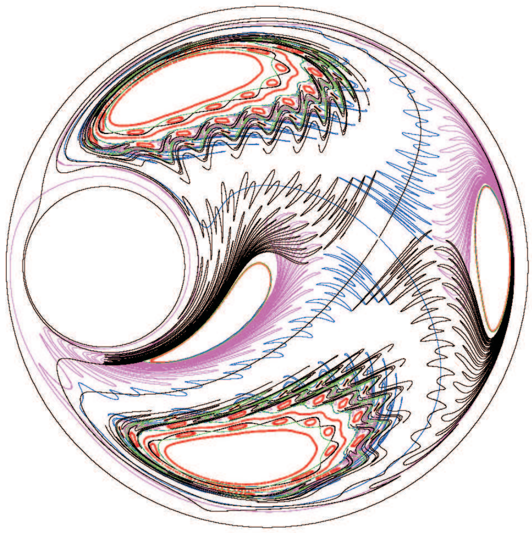
我們先給所有自然數定一個前後次序, 這個次序叫做沙可夫斯基次序, 其定義如下: 先將所有大於一的奇數按由小而大的順序排, 所以得到 3, 5, 7, ..., 也就是 3 排最前面, 之後爲 5, 再之後爲 7, 9, 11 等等, 然後我們把這些奇數每個都乘上 2 後再接著排, 所以得到 3, 5, 7, $\ldots, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, \ldots$, 接下來排 2 的平方乘 3, 2 的平方乘 5, 2 的平方乘 7 等等, 以此類推, 最後把 2 的正整數次方按由大而小的順序排在最後, 所以在最後面的數就是 ..., 32, 16, 8, 4, 2, 1。沙可夫斯基定理是說: 如果 f 是一個從實數集到實數集的連續函數, 且 f 有一個

週期爲 m 的週期點, 則對於所有排在 m 後面的週期的週期點, f 都有。對於這個結果, 我們有一個能讓一般修過初等微積分的大學生都看得懂的證明。這個證明利用下面這個微積分的習題: 如果 a 和 b 滿足 $f(b) < a < b \leq f(a)$, 則存在一個 f 的定點 z, 一個 f 的週期二的點 y, 以及一點 v 使得 $y < v < z < b = f(v)$ 且對所有滿足不等式 $y < x \leq v$ 的點 x, 都有 $f(x) > z$ 以及 $f^2(x) < x$。有興趣的讀者, 可嘗試看看, 先利用上述這個習題來證明: f 如有週期是奇數 k 且 $k > 1$ 的週期點, 則 f 必有週期爲 $k+2$ 的週期點也一定會有所有週期是偶數的週期點; 之後由此就可以證得沙可夫斯基定理了。

由沙可夫斯基定理可知, 即使在不是很複雜的動力系統中都可找到無窮多的週期解; 這種不是「寂兮寥兮」的週期現象, 是混沌概念的起源之一。

接下來, 我們舉個可做實驗的流體力學現象。一般有常識的人都相信, 在極粘的不可壓縮流場中, 極強的粘滯力會抹平任何奇怪的現象; 若把這個流場看成動力系統, 寫出來的微分方程式剛好也滿足古典力學的守恒律。現在, 我們把這個流場用兩個圓柱體圍成一個環形, 然後讓這兩個圓柱體輪流地緩慢但定速地轉動, 或換句術語, 加上這些邊界條件以形成一個片段可積的動力系統; 同時在流場上灑些鋁粉之類的觀察標記。通常, 你會看到這些觀察標記慢慢地聚成頗有規則的形狀; 但是, 在這兩個圓柱體不是同心的情況下, 你也會看到有些內外圈的轉速比會讓那些觀察標記, 最後變得雜亂無章, 似有違常理。受過訓練的觀察者, 當會懷疑其中有發生某種分歧現象。

在動力系統中, 另外有個名聲響亮的 Smale-Birkhoff 定理, 可用來解釋上述的困擾。這個定理所說的, 是一種幾何描述, 大意如下: 你所看到的流場中, 可能有些橢圓性及雙曲性的奇異點 (前著的固有值爲純虛數, 而後著的固有值的實部不爲零, 透過 Poincare-Birkhoff 定理, 這兩類奇異點有時會有共生現象), 而由雙曲性奇異點發出的穩定流形與不穩定流形若發生糾纏, 跳起了探戈, 帶動了「馬蹄鐵現象」, 那麼雜亂無章實屬必然, 因爲那就是混沌的表徵之一。想要確實體驗這種描述, 包括找尋奇異點及掌握相關的流形, 就得靠理論、實驗之外的第三隻眼 — 科學計算, 以竟其功。透過嚴謹的數值模擬, 我們可以淸楚地看到這兩類流形, 如何從縱向的密合蛻變成橫向的糾纏。隨文附上一圖示, 讓讀者感受一下我們從這個角度所看到的混沌模樣。「惚兮恍兮, 其中有形; 恍兮惚兮, 其中有狀」。(本文原刊載於中央研究院「週報」1046 期"研究成果", 感謝「週報」編輯委員同意本刊轉載。)



—本文作者任職於中央研究院數學所—