再談畢氏定理與餘弦定理的證明

朱　哲

「數學傳播」二十八卷第三期上刊登張海潮先生的短文「畢氏定理與餘弦定理的證明」。餘弦定理是畢氏定理在斜三角形上的推廣, 它們在證明方法上也存在著必然的聯繫。張先生用歐幾里德證明畢氏定理的方法證明了餘弦定理, 筆者深受啓發; 同時發現, 我們還可以用其他方法來證明。

1. 愛因斯坦方法證明餘弦定理

愛因斯坦12歲時, 在未學過平面幾何的情況下, 曾基於三角形的相似特性, 獨立地給出了畢氏定理的一個證法, 這一方法相當地巧妙和簡單。不過, 這一方法並不是創新, 因爲在歐幾里德「原本」中已經有了這種證法, 只是敍述較繁。

如圖1, 作直角三角形 ABC 斜邊上的高 $\overline{CD}$, 則$\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle CBD$ 都是彼此相似的。那麼根據相似三角形中對應邊長之比相等 (或者直接利用射影定理), 有 $\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}$, $\overline{BC}^2=\overline{BD}\cdot\overline{AB}$, 兩式相加得 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=(\overline{AD}+\overline{BD})\cdot\overline{AB}=\overline{AB}^2$。

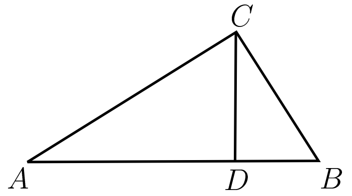

圖1

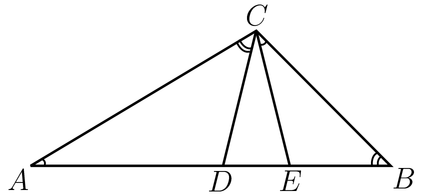

圖2

這一方法可以推廣到斜三角形, 我們以鈍角三角形爲例證明餘弦定理 (銳角三角形可以類似處理)。

如圖2, 在 $\triangle ABC$ 中, 過 C 點作線段 $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D, E, 使$\angle ACD=\angle B$, $\angle BCE=\angle A$。顯然有$\triangle ACD\sim\triangle ABC\sim\triangle CBE$, $\therefore$ $\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}$, $\overline{BC}^2=$

$\overline{BE}\cdot\overline{AB}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$。而 $\angle CDE=\angle CED=\angle A+\angle B$, 由餘弦定義知,

$$\cos(A+B)=\cos\angle CDE=\frac{\frac{1}{2}\overline{DE}}{\overline{CD}}.$$

$\therefore\overline{DE}=2\overline{CD}\cdot\cos(A+B)=2\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}\cos(A+B)$。

$\therefore\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=(\overline{AD}+\overline{BE})\cdot\overline{AB}=(\overline{AB}-\overline{DE})\cdot\overline{AB}=\overline{AB}^2-\overline{DE}\cdot\overline{AB}=\overline{AB}^2-2\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}\cos(A+B)\cdot\overline{AB}=\overline{AB}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos(A+B)=\overline{AB}^2+2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos C$。(這裏的角 C 指 $\angle ACB$。)

如此便證明了餘弦定理。在圖2中, 若D,E重合, 則 $\angle ACB$ 爲直角, 餘弦定理變爲畢氏定理。

2. 伽菲爾德方法證明餘弦定理

1876年4月, 美國俄亥俄州的共和黨議員伽菲爾德發表了畢氏定理的一種證法。1881年他當選美國第20任總統, 這種方法也被稱爲總統方法, 成爲數學史上的一段佳話。他把兩個全等的直角三角形拼成如圖3所示的圖形, 用兩種方法計算梯形面積, $S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=2\cdot\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$, 化簡整理得 $a^2+b^2=c^2$。

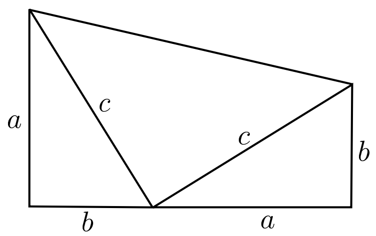

圖3

利用這一方法我們不能直接證明餘弦定理, 但可以證明 $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ 公式:

用兩個斜邊長均爲1的直角三角形拼成如圖4所示的圖形, 用兩種方法來計算梯形面積, $S_{梯形}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)(\cos A+\cos B)=\frac{1}{2}\sin A\cos A+\frac{1}{2}\sin B\cos B+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(A+B)$, 化簡整理得 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$。

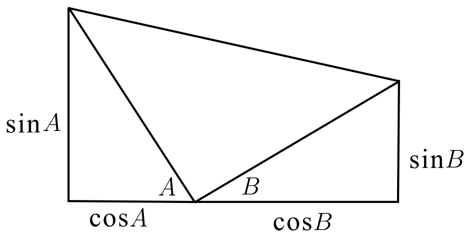

圖4

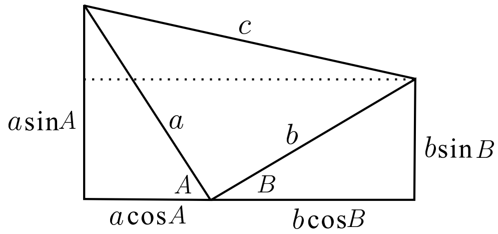

圖5

利用畢氏定理可知, 該直角梯形腰長爲 $\sqrt{(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2}$, 利用三角形餘弦定理可得

$$\cos(A+B)=-\cos[\pi-(A+B)]=\frac{1^2+1^2-[(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2]}{2\cdot 1\cdot 1},$$

化簡整理得 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$。

伽菲爾德方法雖然不能直接證明餘弦定理, 但受 $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$公式證明過程的啓發, 我們把兩個斜邊分別爲 a,b 的直角三角形如圖5放置, 利用畢氏定理得:

$$\begin{aligned}
c^2&=(a\cos A+b\cos B)^2+(a\sin A-b\sin B)^2\\
&=a^2\cos^2 A+2ab\cos A\cos B+b^2\cos^2 B+a^2\sin^2 A-2ab\sin A\sin B+b^2\sin^2 B\\
&=a^2+b^2+2ab(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\\
&=a^2+b^2+2ab\cos(A+B)=a^2+b^2-2ab\cos C.
\end{aligned}$$

不難看出, 這其實是上述 $\cos(A+B)$ 公式證明的逆過程。所以我們需先用其他方法對 "$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$"公式進行證明, 再推出餘弦定理, 不然就陷入了循環論證。

—本文作者任教於中國浙江師範大學數理學院—