求真立德, 育美致善
——發揮數學文化教育功能實踐之一

郁建輝

教育孩子的目標應該是逐步地組合他們的知和行, 在各種學科中, 數學是最能實現這一目標的學科。

— 康得 · 依曼努爾

21世紀是是高科技的世紀。“高新技術從本質上講是一種數學技術”[1]。數學給世界帶來了資訊化, 資訊化使世界駛上了快速發展的高速公路, 極大地豐富了人們的精神生活和物質生活。

數學還給我們帶來些什?

丘成桐先生論及數學的教育作用時曾深刻的指出: 在傳統文化中, 我們說立德, 但卻從不討論如何求眞, 何以立德, 我們又說“溫柔敦厚, 詩教也”, 但只是含糊的說美, 數學兼講眞美, 是中華民族需要的基本學科。

徐利治先生認爲 “數學教育本應具有文化教育功能 (培養人的優秀文化素質的功能) 與技能教育功能”。他說:“數學還具有文化功能, 這卻是人們容易忽視的。學習數學不僅能夠掌握數學知識和計算方法, 而且能夠培養嚴謹的邏輯思維能力和機智的創造性的思維能力, 能夠養成冷靜、客觀、公正的思維習慣, 實事求是、有條不紊地處理問題。數學教育的目的正是在於培養全面領會數學功能的人才, 既會應用數學解決實際問題, 又能掌握數學的精神、思想和方法。⋯⋯ 偏重數學的實用功能而忽視其文化功能, 是數學教育中的狹隘和短視的觀念”[2]。如何全面發揮數學的教育功能, 培養出高素質的創新型人才, 是數學教育工作者面對新的世紀必須作出的應答之一。

二十世紀八十年代末誕生於無錫的 MM 教育方式[註1] 正是注意到數學文化教育功能普遍受到忽視的局面, 而著重研究了數學文化教育功能的理論和實踐, 率先從狹隘的學科教學目標跳出, 提出了大文化的教學目標: 在數學教學過程中, 教師遵循數學本身的發現、發明與創新

[註1]: 爲數學方法論的數學教育方式, MM 是 Mathematical Methodlogy 的縮寫。

等發展規律, 遵循學生的身心發展和認知規律, 力求使它們同步協調, 並引導學生不斷地自我增進一般科學素養、社會文化修養, 形成和發展數學品質, 全面提高學生素質[3]。這無疑是數學教改的重要方向。

本文僅就 MM 方式教學中的一些實例說明發揮數學文化教育功能的實踐和認識, 以期與關心這一問題的同仁們進一步深入討論。

一. 加強邏輯思維教學、培育理性精神, 演繹理性的力量。

數學對人類文明最大的貢獻是什麼? 是理性精神。理性精神是一種 "推演的精神、邏輯的精神", 是一種求眞、求美的精神。人類的任何其他創造都不可能像歐幾裡德的的幾百條證明那樣, 顯示出這麼多的知識都僅靠幾條公理推導出來, 它使人們瞭解到理性的力量, 正如愛因斯坦曾讚歎道 "數學推理的這種可讚歎的勝利, 使人類的智慧獲得了為取得以後成就所必須的信心", 以致使神學、邏輯學、哲學家、政治家、和所有眞理的追求者都紛紛仿效歐幾裡德模式來建立他們自己的理論[4]。發揮數學的文化教育功能, 就應積極地培育理性精神、演繹理性的力量, "就是通過數學抽象去鍛煉心靈的智慧, 以期瞭解世界的本源和實質"。

數學的公理性系統和邏輯推理孕育了理性精神, 培養理性精神的主要途徑也就是加強公理化和邏輯推理的教學。楊振寧先生認為 "這個推演的精神、邏輯的精神在中國傳統裡是沒有的"。現在情況當然有了很大的改善, 但還是顯得有些邏輯底蘊不足 (漢語詞典出現名詞的迴圈解釋就是一證)。因此加強公理化和邏輯推理教育是很有其現實意義的。

廣大的數學教師在長期教學中在這方面創造和積累了豐富的方法和經驗, 在此我們不加贅述。我們認為下面一些方面也應該引起注意

1.1. 按公理化形式組織教學, 在知識的建構中提高邏輯思維能力

學校生活是現代人生命的重要組成部分, 是形成世界觀最重要的生理時期, 因此在教學中加強公理化和培養邏輯思維能力的教育就遠遠超出學校教育本身的意義。培育理性精神、演繹理性的力量, 數學應是最佳的科目。因此, 把"課"按公理化的形式組織好是必要的, 也是可能的。

比如在有理數乘法法則的教學中, 傳統的講法是"聯繫實際", 從 "向東、向西"開始, 往往是以"老師一頭汗水, 學生一頭霧水" 結束。用公理化方式組織教學, 可從學生熟知的自然數和運算定律出發, 為滿足四則運算封閉性, 採用如下的方法:

(1) 兩個正有理數相乘, 即 $(+a)\times(+b)$ (a、b 為絕對值, 下同) 這是小學裡所學的乘法即 $(+a)\times(+b)=+(a\times b)=+ab$。

(2) 一個正有理數、一個負有理數相乘即 $(+a)\times(-b)$ 或 $(-a)\times(+b)$, 約定 "數系運算通性" 繼續有效。

則有: $(+a)\times(+b)+(+a)\times(-b)$

$$
\begin{aligned}
&= (+a)\times[(+b)+(-b)] && \text{(分配律)}\\
&= (+a)\times 0 && \text{(相反數特性)}\\
&= 0 && \text{(0 的特性)}
\end{aligned}
$$

即 $ab+(+a)\times(-b)=0$

$\therefore (+a)\times(-b)$ 的積與 ab 應是互爲相反數, 因而應規定 $(+a)\times(-b)=-ab\cdots\cdots$。

(3) 兩個負有理數相乘, 即 $(-a)\times(-b)$

$\because (-a)\times(-b)+(+a)\times(-b)=[(-a)+(+a)]\times(-b)=0\times(-b)=0$,

$\therefore (-a)\times(-b)$ 是 $(+a)\times(-b)$ 的相反數又由於 $(+a)\times(-b)=-ab$ $\therefore (-a)\times(-b)=+ab$。

所以兩個負數相乘時, 我們規定 $(-a)\times(-b)=+ab$[5]。

這是我們在有理數教學中進行了長期的探索, 反復比較之後作出的選擇。也許人們認爲邏輯推理枯燥乏味, 但我們認爲這樣處理反而輕鬆愉快地更好地達到了教學目標, 完成教學任務。我們感到這樣處理, 使學生在初一就初步感受到推理嚴謹、言必有據和條理化, 並以此爲標準去規範自己的思維和表達, 養成淸楚表述思想, 並嚴格遵守規則的習慣。這樣處理顯示了公理化系統和邏輯推理的力量。

在數學教學中體現公理化和邏輯推理, 可以使學生更好地從整體上瞭解數學及其組織方法, 並在看書、聽課、討論及作業等學習活動中適當地訓練其組織能力和習慣。這種習慣和能力一旦養成, 在適當的場合就會發生遷移, 日後就能自覺或不自覺地以此種精神對待業務工作。而這 "組織才能" 和系統化觀念, 也恰是現代社會所必需的。

再者, 證明是一種透明的辯論, 其中用到的論據、推理過程⋯⋯ 都淸楚地展示給讀者, 任由人們公開批評, 不必向權威低頭 (C.Hanna)。因此, 在數學教學中我們注意培養科學嚴謹的學風, 鼓勵發現問題, 培養堅持眞理、修正錯誤的勇氣, 做到 "唯理是舉", 藉以培養人的誠實和正直的品格, 在求眞中立德。

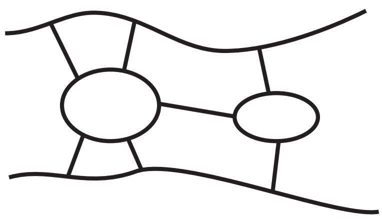
1.2. 在邏輯初步知識的學習中提高思維能力

筆者認爲在中學數學教學中適當地介紹邏輯的初步知識是必要的。從目前狀況看, 學生所瞭解的邏輯知識主要是充分、必要條件 (掌握的也很差) 和 "三段論", 學生甚至有的教師不理解 "$5\le 7$" 就是 "$5<7$" 和 "$5=7$" 析取。這與社會的需求和進一步的學習是很不適應的。前

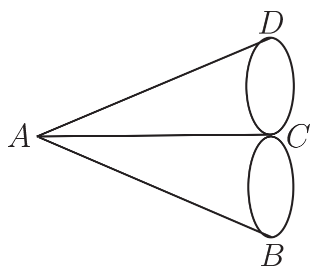
蘇聯的一些研究表明, 只進行簡單邏輯運算的訓練而不進行專門學習邏輯知識, 即使訓練多年也不能掌握這些運算的含義, 不能使學生的邏輯思維得到發展。

1.3. 巧用數學史料、趣事, 在“昨天的故事” 中感受心靈的震撼

數學的史料趣事反映當時數學方法的突破, 也反映了當時當地的文化的特點, 因此用好這些材料也是對學生進行理性教育的一個重要方面。同時, 數學史料趣事的應用, 可以對學生進行生動的德育教育, 受到眞善美的熏陶, 還可以培養學生濃厚的學習興趣, 激發學生的求知欲。恰當地運用數學史料、趣事又是一種有力的“暗示”和積極的休息方式, 可以使學生思想集中, 精神放鬆, 在聽故事中學知識、育德行、增智慧。學生緊張的大腦得到調劑, 有益於身心發展, 有益於精神的愉悅。比如爲提高學生對理性力量的認識, 給學生講當年哥尼斯堡的市民千萬次企圖用“脚” 去 “脚踏實地” 去解決看似簡單的 “不重復地一次走過此城的七橋” 問題卻沒有結果, 最終還得去請教暫住此城的數學大師歐拉。歐拉沒有沿用實踐的方法, 他運用抽象分析法, 首先將哥尼斯堡城地圖 (圖1.1) 抽象化, 用點代表陸地, 用線代表橋, 於是得到一張簡單的圖形 (圖1.2)。如果點與奇數條線 (奇數座橋) 相連 (這樣的點稱爲奇點), 則該點不是起點就是終點。



(圖1.1)



(圖1.2)

由此圖得出“所謂一次性走過七橋, 即奇數點的個數不應多於2個”, 而圖 1.2 中 A、B、C、D 均爲奇數點, 從而得出了否定的結論。更是令人不可思議的是由此竟然產生了二門新的數學分支— 拓樸學和圖論。這個衆所周知的“數學典故” 生動而有趣地說明了一個事實:

極端的抽象是眞正的武器, 用以控制具體事物的思維。— A.N 特黑德

學生也可從爲 $\sqrt{2}$ 的無理性光榮獻身的希帕蘇斯及數學家們不只以求得 $\sqrt{2}$ 的近似值達到實用目的爲滿足, 而更關心 $\sqrt{2}$ 是否爲有理數與它的 ‘本質’ 是什麼並堅持要有證明的史實中, 學習到不帶任何功利的爲理念、理想、眞理而堅持到底的態度, 淡泊名利、潛心做學問、爲眞理獻身的精神, 而這種精神在當今的經濟大潮中更是難能可貴的。

二. 加強數學思想方法的教育, 為學生的終生發展而教。

關於數學教育, 日本的數學家、教育家米山國藏曾說 “學生們在初高中所學到的數學知識, 幾乎沒有什麼機會應用, 很快就會忘掉, 然而不管他們從事什麼業務工作, 唯有深深地銘刻於腦際的數學精神和數學思想方法, 卻長期地在他們的生活和工作中發揮著重要作用”。在資訊社會的今天, 數學思想方法在人們日常生活中的應用也越來越多。人們常誇“某人講話、寫文章思維嚴密、邏輯性強” 則表明公理化和邏輯推理已成爲尋常百姓判斷人的文化素質高低的一個重要標準。歸納、類比、猜測等不僅是人們處理日常事務一種必不可少的推理, 而且是創新的主要源泉。化歸思想, 即將陌生情境下的問題轉化爲熟悉問題的思想, 是人人都在自覺運用的, 只是運用的水平有不同。至於演算法思想 (程式思想), 更是電腦運算的核心思想, 就是人的一日三餐, 也是一種演算法實施, 現代企業以產品生產的程式進行分工, 設置流水線, 並力圖使生產流程最優化。因此, 在數學教育中有意識地加強數學思想方法的教育, 不僅有利於學生掌握數學的思想方法, 學會數學地思維, 也是現代社會對公民的基本要求, 有利於人的一般科學文化素質的提高。

數學觀念、數學思想的形成, 是一個文化積澱的過程, 企圖通過一節課一單元的教學形成一個數學觀念、數學思想是不現實的, 但利用一節課、一個單元的教學爲數學觀念的形成作具體工作, 加快觀念的形成卻是必要的, 也是可能的。這裡的關鍵是要有意識地在設計和實施教學中體現數學的有關思想方法, 辯證地處理滲透性與明確性、有序性與重復性。

2.1. 用數學方法論去分析教材, 從文化的高度理解內容。

文字不等於文化, 知識不等於思想, 數學思想、觀念隱含於數學知識。因此用數學方法論分析和解剖教材, 是進行數學思想方法教學的前提, 不僅要注意數學方法論中微觀因數的應用更要注意宏觀因數的應用, 只有如此才能發揮好數學的文化教育功能。比如極限定義的教學歷來是一個重點、也是一個難點。從歷史上看, 在中國古代就有樸素的極限思想, 極限定義的精確化是爲了解決牛頓、萊布尼茨發明微積分所遇到的邏輯矛盾; 從方法論上講, 是對原有樸素的極限方法一次重大突破, 它體現了過程與結果的統一, 是從有限過程中認識無限過程結果的一種數學方法, 是許多自然學科和技術的有力工具。據此認識我們設計了如下的教學過程:

(1) 從“兎龜賽跑”的故事和“$\pi = 2$” 的悖論引入, 讓困惑與學生面對面。

(2) 數形結合, 把數列 $\{a_n\}$ 及其極限 A 標在數軸上, 學生看到隨項數 n 增大, a_n 與 A 的距離越來越近, 促使學生在“思想實驗”中接受了當項數 n 無限增大時 a_n 與某一個常數 A 可以無限接近的現象。這樣, 數列極限的描述性定義便在學生頭腦 (思維) 中返樸歸眞地構建出:

數列 $\{a_n\}$ 當項數 n 無限增大時, 若 a_n 與某一個常數 A 可以無限接近, 這時我們說當 n 趨於無窮大時, $\{a_n\}$ 數列的極限爲常數 A。

(3) 在對極限的描述性定義的的運用分析中, 發現其中的“無限接近”的定性描述, 難以對極限進行進一步研究。

(4) 對“無限接近”的精細刻劃。在數軸上, a_n 與 A 的接近程度可用 $|a_n-A|$ 來刻劃, 那麼“無限接近”的意義是什麼?

考察 A 的一個鄰域 I, 不妨設爲 $I=(A-10^{-1},A+10^{-1})$, 在數軸上可以看到, 若數列 $\{a\}$ 以 A 爲極限, 落在 I 外的項 a_n 是有限個, 而進入 I 的項 a_n 是無窮多個, 即 n 充分大後, a_n 連續不斷地進入 I (圖2) 也即 $|a_n-A|<10^{-1}$。縮小 I 的範圍, 都有同樣的現象出現。

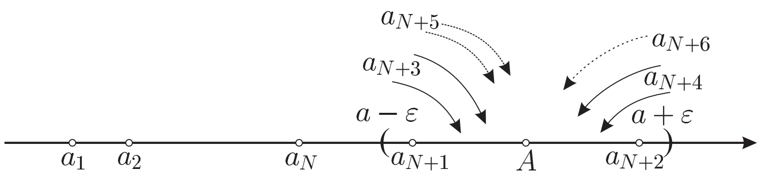


圖2

若數列 $\{b_n\}$ 的極限不是 A, 不難找到一個 ε (及比 ε 小的所有正數), 對 I 一定有無窮多項 b_n 落在 $I=(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 的外面。

綜上所述, 可得出“無限接近”的意義爲對於預先指定的任意小正數 ε, 當 n 充分大後, 所有的 N 都滿足 $|a_n-A|<\varepsilon$, 而 n 充分大的標準可由不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 來確定, 由此理解, 再適當地加以形式化處理便得到數列極限的精確性定義。

這樣的教學設計使極限教學化難爲易, 較好地將變化的有限片斷與 “無窮過程的完成” 統一起來, 較好地揭示了極限的意義。也看到了數學概念並不是一堆枯燥語句的組合, 而是充滿了人類不斷追求完美精神的結晶, 並且受到有限與無限的對立統一、變與不變辨證關係的哲學思想的教育。不僅如此, 從中還可以體悟到批駁謬誤的有效方法應是理性分析, 同時又學習到實事求是、言必有據的科學態度, 感受到有條理表述思想、有條不紊工作的陶冶。

2.2. 應體現數學研究的一般方法和數學的追求。

隨著時代的發展, 數學及其方法在各門科學中應用越來越廣泛深入, 各學科的成熟化程度就是其數學化程度, 因此, 加強學生對數學思想的理解和體驗是非常必要的, 這就要求在教學中有所體現、適當強化。MM 實驗班在二項式定理的教學中這樣一個案例使我們感觸頗深。實驗老師首先與學生共同討論成語故事“歧路亡羊”:

> 楊子之鄰人亡羊, 既率其黨, 又請楊子之豎追之。楊子曰:「嘻! 亡一羊, 何追者之衆?」鄰人曰:「多歧路。」既反, 問:「獲羊乎?」曰:「亡之矣。」曰:「奚亡之? 」曰:「歧路之中又有歧焉, 吾不知所之, 所以反也」。

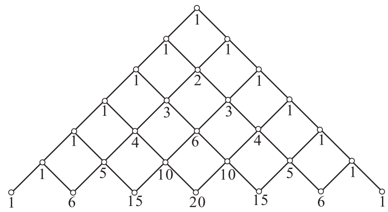


圖3

解讀其中的數學含義, 建立其數學模型, 在求美中得到圖3 (向左、向右, 並計算到達各結點的路徑數)。接著用類比的方法探究 $(a+b)^n$ 的展開式 (使向左與 a、向右與 b 一一對應), 在複習 $(a+b)^2$、$(a+b)^3$ 展開式基礎上猜測 $(a+b)^n$ 的展開式, 從而得到圖3 的數學解釋; 然後启發學生觀察、分析、認識“楊輝三角” 的結構規律, 簡介楊輝三角與二項式定理的歷史。這樣的教學設計安排合理、生動有趣, 學生主動參與、積極探究。而在小結時又有學生提出了一個具有挑戰性問題, 使此教學過程錦上添花, 顯示了重視數學思想方法教學所產生的可發展性和創造性。學生是這樣提出問題: $(a+b)^n$ 展開式的係數表爲楊輝三角, 直觀、方便、好用, 那麼 $(a+b+c)^n$ 展開式的係數表是怎樣的? 如此具有“挑戰”性的問題自然引發師生的熱烈討論。教學中的建模思想與對應類比等思想發揮了作用, 類比於圖3, 使 “a 與向左、b 與向右、c 與向上” 對應, 用幾乎完全類同於研究二項式定理的方法, 我們得到了圖4, 即爲 $(a+b+c)^n$ 展開式的係數表的幾何模型, 稱之爲楊輝四面體。其第 n 層截面三角形 (記爲 $\triangle_n$), 即爲 $(a+b+c)^n$ 展開式各項係數 (見圖5.1、5.2 $n=5,6$)。

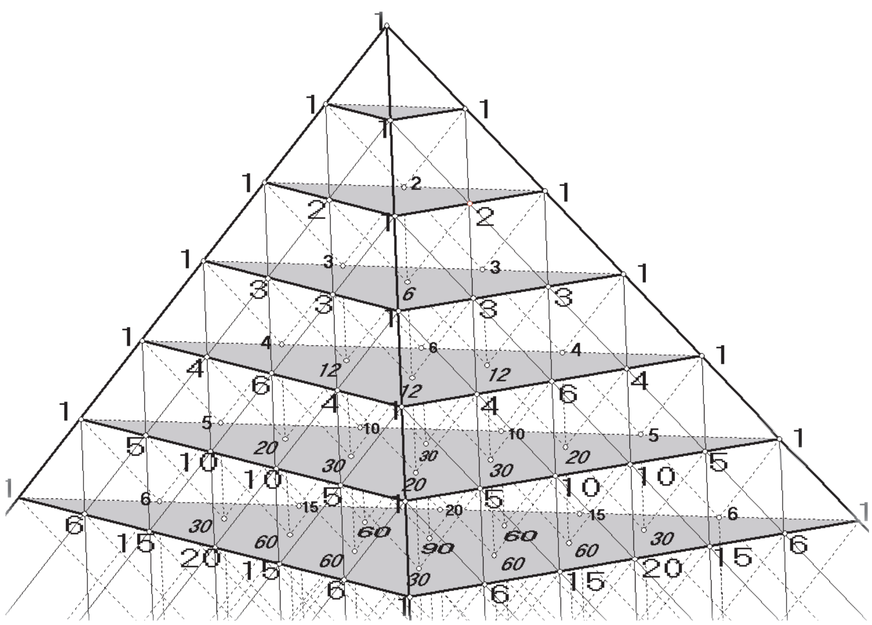


圖4

從圖4可以得到楊輝四面體的如下性質:

(1) 圖中的三面角的每個面爲楊輝三角, 即楊輝三角爲楊輝四面體的特例。

(2) 第 $k+1$ 個截面三角形 $\triangle_{k+1}$ 的頂點、邊、內部各點分別與第 k 個截面 $\triangle_k$ 上的一、二、三個係數相連通, 其對應的係數爲與其相連通的係數之和。

若將 $\triangle_k$ 中的第 i 行第 j 個係數記爲 $d^k_{i,j}$, 則此性質可表示爲 $d^{k+1}_{i,j}=d^k_{i,j}+d^k_{i-1,j}+d^k_{i-1,j-1}$。以 $k=5$ 爲例, $\triangle_5$ 中 $d^5_{3,2}=20$, $d^5_{2,2}=5$, $d^5_{2,1}=5$, 在 $\triangle_{5+1}$ 中 $d^6_{3,2}=30$。

	1	1	1
1	6 6	6	1 1
5 5	15 30 15	15	1 2 1
10 20 10	20 60 60 20	20	1 3 3 1
10 30 30 10	15 60 90 60 15	15	1 4 6 4 1
5 20 30 20 5	6 30 60 30 30 6	6	1 5 10 10 5 1
1 5 10 10 5 1	1 6 15 20 15 6 1	1	1 6 15 20 15 6 1
Δ_5	Δ_6		Δ_6
圖5.1	圖5.2		圖5.3

由此可由 $\triangle_5$ 推得 $\triangle_6$。數學對"簡單性"的追求, 進一步研究又找到了"用楊輝三角的第 k 行的每一個數分別乘以楊輝三角的前 K 行的每一行" 得到 $\triangle_K$ 的方法 (圖5.3, $n=6$), 更具有簡潔性和和諧性。

由 $\triangle_K$ 可直接寫出 $(a+b+c)^n$ 展開式, 具體方法爲:

係數三角形 $\triangle_n$ 上作出如圖 6 的三組平行線, 分別稱爲 A組、B組、C組, 在 A 組中從上至下分別記爲 a^n、a^{n-1}、a^{n-2}、$\ldots$、a^m、$\cdots$、a^2、a^1、a^0 線, 其意義爲 a^m 線上的各係數所對應的項中字母 a 的指數均爲 "m", 保持不變。B組、C組可依此類推。這樣, $\triangle_K$ 中的每個係數 $d^n_{i,j}$ 都是 a^m、b^p、c^q 三線的交點則對應的項爲 $d^n_{i,j}a^mb^pc^q$ $(m+p+q=n)$。以 $\triangle_4$ 爲例, 其第三行的三個係數6、12、6所對應的項分別爲 $6a^2b^2$、$12a^2bc$、$6a^2c^2$。

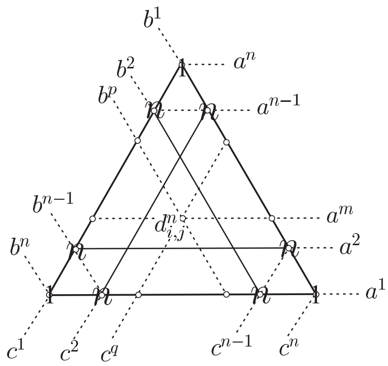


圖6

Δ_4

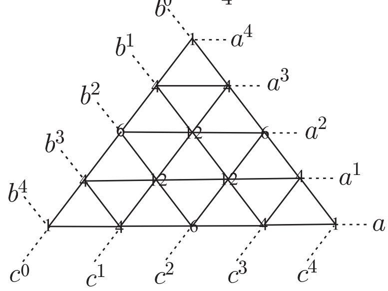


圖7

由此寫出

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 = {} & \underline{a^4} + \underline{4a^3b+4a^3c} + \underline{6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2} \\ & + \underline{4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3} + \underline{b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4}\end{aligned}$$

三. 重視數學思維方式的培養

如果說“教育是所有學會的東西都忘卻以後, 仍然留下來的那些東西”, 那麼, 學生從學校畢業若干年後一定能留下來的是就是他在學校形成的思維方式。科學的思維方式是具體的思維方式的有序、有機的優化組合, 擁有科學思維方式的人, 是眞正具有創新能力的人。對於資訊社會的公民, 無形的科學思維方式勝於有形的億萬財富。

按照數學方法論的觀點, 數學思維具有兩重性: 一類是進行邏輯推理的演繹思維形式, 另一類是進行似眞推理的歸納思維形式, 這兩種思維形式交互作用於數學的發展過程中, 它們都是數學的發明和發現所不可或缺的。似眞推理即合情推理是指觀察、歸納、類比、實驗、聯想、猜測等方法。

合情推理的方法在自然科學中的主流地位是無可懷疑的, 而它在數學中, 儘管高斯、歐拉等數學大師都在運用合情推理做著偉大的工作, 但它一直未能在數學家方法家族中取得其應有的地位。經波利亞的“撥亂反正”, 合情推理終於成爲數學方法論中的主要成員, 而且培養合情推理最合適的學科是數學。因此合情推理能力培養的意義就遠遠超出了培養數學品質的範圍, 而成爲培養人的一般科學素養的重要舉措。國家的教學大綱也把合情推理能力作爲必須培養的能力之一, 因此教猜想也成了熱門, 這是非常值得高興的事情。但近來又出現了一些“以猜代證”的傾向。因此, 在加強合情推理教學時必須堅持“旣教證明, 又教猜想”的原則, 用合情推理去發現, 用邏輯推理去證明, 使兩種推理的優勢互補, 全面提高人的思維能力, 全面開發腦的功能。

3.1. 創新能力在合情推理的培養中得到提高

在高二橢圓教學的小結課上, 有學生提出, 橢圓面積公式是什麼? 任課教師心頭一喜, 沒有直接給出答案, 而且趁勢問道:「你們覺得橢圓面積公式是怎樣的?」一石激起千層浪, 學生七嘴八舌提出了多種方案。很多同學認爲, 旣然把圓可看成特殊的橢圓 ($a=b=R$), 那麼橢圓的面積公式與圓的面積公式 $S=\pi R^2$ 必定

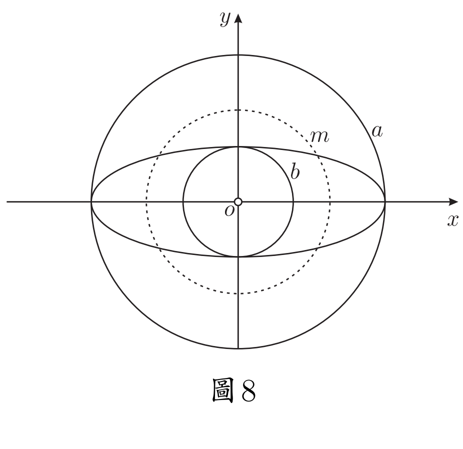


圖8

有某些相似之處。一部分同學由圖8 出發, 認爲橢圓的面積應等於介於以 a 與 b 爲半徑的兩圓之間的某個圓 M 的面積, 經過討論, 歸納起來有三種意見:

(1) 圓 M 的半徑是 a 與 b 的等差中項, 所以 $S_{橢圓}=\pi(\frac{a+b}{2})^2$,

(2) 圓 M 面積是圓 a 與圓 b 面積的等差中項所以 $S_{橢圓}=\pi(\frac{a^2+b^2}{2})$,

(3) 圓 M 的半徑是 a 與 b 的等比中項, 所以 $S_{橢圓}=\pi ab$。

也有部分同學認爲既然圓是橢圓的特例, 那麼橢圓的面積公式也應該具有 $S_{橢圓}=\pi(\ )\times(\ )$ 的形式, 所以可能是 $S_{橢圓}=\pi ab$。經討論, 多數同學的意見統一在第三個公式 $S_{橢圓}=\pi ab$, 爾後師生用幾何畫板驗證了第三個公式的正確。老師肯定了同學學習中的創造性後說, 該公式的證明一般要用大學裡的微積分方法。任課課教師原以爲事情到此爲止, 沒想到學生課後送來他的證明:

圓柱的底面半徑爲 R, 一截面 (橢圓) 與底面成角 θ (圖9); 顯然橢圓的長半軸 $a=\frac{R}{\cos\theta}$, 短半軸 $b=R$, 於是

$$S_{橢圓}=\frac{S}{\cos\theta}=\frac{\pi R^2}{\cos\theta}=\pi\frac{R}{\cos\theta}R=\pi ab.$$

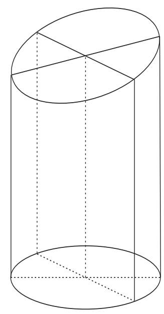


圖9

雖然證明較爲粗糙, 卻是用“初等”的方法證明了“高等”的問題, 這雖不是“原創”, 但顯示了學生的創新能力。從學生們充滿激情的探索、富有成果的研討中, 我們看到了加強合情推理的教學, 學生就會將日常事務中積累的經驗、方法用於學習中, 提高學習的興趣, 提高解決問題的能力; 而在其中, 又將那自然狀態下的合情推理的能力提高到一個更加合理, 更加科學的層次, 以至成爲“科學發現的金鑰匙”。

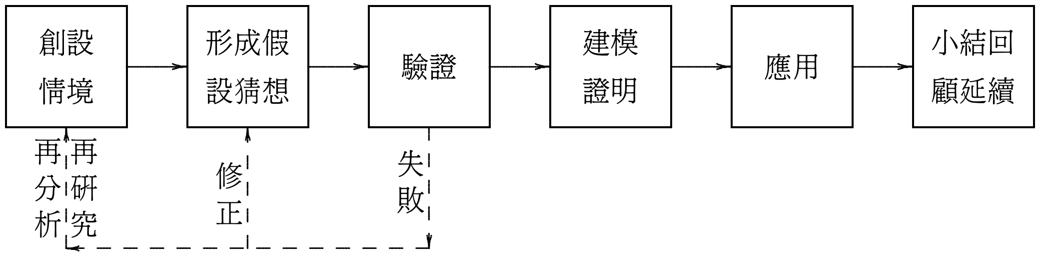
因此在數學教學中, 引導學生主動地運用觀察、實驗、歸納、類比、和聯想猜測等合情推理的方法, 探索新知識, 發現新問題, 從而達到培養學生創新思維品質的目的。

3.2. 科學的思維方式在教學過程中得到內化

數學思維方式可以描述爲 “觀察現象, 抓住其主要特徵, 抽象出概念或建立模式, 作出直覺判斷, 然後進行深入分析和邏輯推理, 揭示事物的內在規律, 從而使紛繁複雜現象變得井然有序”[6]。爲了促進學生數學思維方式的養成, 並爲教師提供一個可操作教學樣式, 我們構建了合情推理教學模式。此模式得到了廣泛的認同, 發表在「數學教育學報」98 第二期。

使我們感到高興的是該模式也得到了理化等學科老師的認可, 並在他們的教學中取得了很好的效果。

由上可以看到合情推理教學模式較好地體現了數學思維方式, 符合科學思維方式, 所以該模式的應用將非常有利於學生科學思維方式的養成。



3.3. 科學的哲學觀從數學學習的內容中悟出

數學是對科學哲學觀最好的詮釋, 是“辯證的輔助工具和表現形式”。因此從數學內容及其內在聯繫上, 對學生進行科學哲學觀的教育是數學教育當仁不讓的責任。在圓錐曲線第二定義的教學中, 有兩個問題需要解決: (1) 形態各異的圓、橢圓、雙曲線、拋物線怎樣聯繫起來的, (2) 人們是怎樣建立這個認識的? 經反復研究教材, 分析教材的編寫意圖和學生認知結構, 我們是這樣組織教學的:

3.3.1. 圓的第二定義在經驗歸納中發現

圓是橢圓的特殊情形 ($e = 0$, 焦點與中心重合), 從圓的半徑類比地想到計算橢圓的焦半徑, 通過幾個具體橢圓焦半徑的形式可由經驗歸納得焦半徑的一般形式爲 $|MF| = e|x - \frac{a^2}{c}|$, 其中 $|MF|$ 爲橢圓上點 $M(x, y)$ 的焦半徑, $|x - \frac{a^2}{2}|$ 爲橢圓上點 $M(x, y)$ 到某一定直線 $x = \frac{a^2}{2}$ 的距離 d, e 爲離心率是定量, 故可得數學命題: 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的點, 到定點 F (焦點) 的距離與到定直線 ($x = \frac{a^2}{c}$) 的距離的比爲定值 e。

自然, 由數學的逆向思維得其逆命題: 到定點 F (焦點) 的距離與到定直線 ($x = \frac{a^2}{c}$) 的距離的比爲定值 $0 < e < 1$ 的點的軌跡爲橢圓。

3.3.2. 雙曲線的第二定義在與橢圓的第二定義類比推理中獲得。(略)

3.3.3. 拋物線的定義從數學分類思想 (對 e 的分劃) 中呼之欲出 。

首先做課本的練習 $x^2 + y^2 \cos\alpha = 1$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$, 並講述自然科學小故事提丟斯發現的歷史小故事 — 1766年, 天文學家提丟斯根據已知的太陽系六顆行星與太陽的平均距離製得下表:

行星	水星	金星	地球	火星		木星	土星
距離	4+0	4+3	4+6	4+12	4+24	4+48	4+96

因此天文學家斷言, 在火星與木星之間, 對應於 $4 + 24$ 這一數值軌道上一定存在著尙未發現的行星, 於是高斯算出相應的軌道方程, 天文學家經過觀察, 終於在此軌道上發現了一大批

小行星。原來, 這裡確曾有過一個行星, 早在“若干年”前爆炸成了現在的這個小行星帶。這樣在對第二定義下橢圓與雙曲線離心率的區別與聯繫的認識中, 在對離心率 e 從 0 到 ∞ 的變化對曲線形狀影響的思考中, 引入美學機制, 同學十分自然地預測到, 當 $e=1$ 時, 必有介於橢圓和雙曲線之間的某一特定曲線 (拋物線) 存在, 使拋物線在數學分類中呼之欲出。

在此教學過程中, 由於運用了運動、變化、聯繫的思想, 學生可以看到怎樣透過表面現象 (橢圓的若干條焦半徑的具體形式) 認識本質 (橢圓的第二定義), 可以看到某些不同的事物 (圓、橢圓、拋物線、雙曲線) 在一定的條件下 (圓錐曲線第二定義) 得到統一, 看到量變與質變的辯證關係 (e 的變化與曲線形態的關係), 從而受到辯證思想教育。並且這種思想也提高了學生認識、分析、發現問題的能力, 促使部分學生由特殊情形 $e=0$ 想到另一種特殊情形 $e=\infty$, 從而發現了圓錐曲線第二定義中的一個疏漏—排除了定點在定直線上的可能性 — 因而他們給出了當定點在定直線上時的補充定義:

(A) 若所設比值 $e=\infty$, 軌跡不存在 (退化橢圓) 圓;
(B) 若 $e=1$, 軌跡爲一直線 (退化拋物線);
(C) 若 $e\in(1,\infty)$ 軌跡爲兩條相交直線 (退化雙曲線), 其比亦爲定值, 此時的二次曲線退化爲該定直線。

從而完善了該單元的教學[7]。

四. 在“發現”中學習, 變接受式學習為研究式學習。

數學發現過程, 往往也是原有數學觀念的更新, 新的數學方法產生的過程。恩格斯曾講, 歷史從那裡開始, 思維就在那裡開始。一位著名數學家講: 教師應該使兒童走他祖先走過的路, 要快些, 但不要越站。因此, 展示數學發現過程, 重視知識的發生、發明過程的教學, 濃縮歷史進程, 讓學生在“被尋找回來的世界”中, 親歷發現的過程, 品嘗發現的喜悅, 增加發現的體驗, 對於領會數學思想、培養創新能力, 形成“主動、探究、合作”的學習方式是重要的學習平臺。

4.1. “發現情境”的設計

“發現情境”的設計, 不應追求原發現過程的重覆, 而是理性的重建。設計的 “發現”, 應是 “一個發現可能是如何產生的”, 其情境應是與學生的生活經驗、認知結構聯繫較緊密的, 其發現點應設在最近發展區。如在數學歸納法的教學中, 爲體現數學歸納法的發現過程, 直接從歸納公理 —— 自然數集合 N 的任何一個子集, 若含有數 1 (元之素), 且在含有任何一個數的同時含有它的後繼數 a, 則它與 N 相同 —— 講起, 顯然是不妥的。我們反復研讀了波利亞的有關論著, 設計了如下的教學過程:

(1) 問題:$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=?$

(2) 用合情推理的方法, 歸納地得猜想:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(2n+1) \qquad (*)$$

(3) 用 $n=1、2、3\cdots$, 都驗證了公式 $(*)$ 的正確, 增加了我們對公式 $(*)$ 的信心。但是, 由於無法對 $n\geq 1$ 的所有自然數一一驗證, 因而不能說明公式 $(*)$ 正確的一般性。不完全歸納法不能叫人信服, 完全歸納法又不能做到。“山重水複疑無路”, 其實, “路就在脚下”。

(4) 從分析驗證的過程開始。不難發現, (i) 其中有一種我們日常生活中常用的經驗, 一種規律而又簡便的方法, 即利用已有的結果來簡化計算。比如, 驗證 $n=3$ 公式的正確性時, 實際過程爲 $1^2+2^2+3^2=5+3^2=14$, 即在 $1^2+2^2=5$ 的基礎上再加上 3^2, 換言之, 在 $n=2$ 公式 $(*)$ 正確的基礎上 $+3^2$, 通過“計算”得到了 $n=3$ 時公式 $(*)$ 的正確, 以此類推。(ii) 驗證之所以讓人不信服是因爲這樣具體數字的驗證缺乏說服力, 它不能保證這樣的驗證過程能無限制的進行下去。這正是對公式 $(*)$ 最大疑惑之所在。

(5) 對此, 我們自然想到用字母來進行上面的過程, 即: 如果 $n=k$ 時公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)(2k+1) \qquad (1)\ \text{正確,}$$

那麼能否通過“計算”得到 $n=k+1$ 時公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1] \qquad (2)$$

的正確性就成爲問題的關鍵。顯然, 只要檢驗

$$(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]-\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)(2k+1) \qquad (3)$$

的正確即可。顯然這是不困難的, 只要重新整理公式 (3) 的右端即可獲證。這樣我們有了“如果 $n=k$ 時, 公式 (1) 正確, 則 $n=k+1$ 時公式 (2) 也一定正確” 的重要結論。由於 n 的一般性, 所以公式 $(*)$ 的正確性得到了證明。問題 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 得到了圓滿的的解決。

(6) 回顧問題 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=?$ 解決的全過程, 尤其在對公式 $(*)$ 的證明回顧中, 經過哲學的思考、反思, 在公式 $(*)$ 的證明過程, 我們發現了其中有一種規律性的東西, 可以用於其他方面, 那就是公式 $(*)$ 的獲證過程的實質是用“一次驗證和一次推理代替無數次驗證”, 此方法不僅能證明公式 $(*)$ 而且“它可以證明猜想。也就是說, 關於猜想的公式我們知道兩件事就夠了: 它對於 $n=1$ 成立; 既然 n 成立, 那爲它對 $n+1$ 也成立。於是這個猜想對所有的整數都成立: 因爲對1成立, 因而對2也成立; 對2成立, 因而對3也成立, 如此等等。於此我們便有了一個非常重要的論證手段, 稱之爲數學歸納法”[8]。

上面的過程可能不是數學歸納法發現的眞實過程, 但卻是在人們驗算中的一個習以爲常的經驗 "利用已算得 $n=k$ 的結果來計算 $n=k+1$" 的情境中設計了"一個發現可能如何發生的過程"。而且這樣的機會就在我們生活中, 就像牛頓從"蘋果落地" 中得到啓發而發現萬有引力一樣。只要我們勤於觀察, 善於思考, 敢於創新, 就會在原來"熟視無睹"的事務中有所發現、有所創造。這對培養學生的創新意識與能力是非常有利的。

而且"數學歸納法被發現"也應歸功於"回顧和總結"。因爲學生往往會和一般人一樣, 在得到問題的正確答案後, 會合上書本, 去找點別的事情來幹。這樣做會使在問題解答過程中很多比結論更重要的甚至終身受益東西與他們失之交臂。因此, 我們在教學中要適時地幫助學生養成總結、回顧解決問題的過程, 哲學地思考問題本質的習慣, 本例就是一次有益的嘗試。

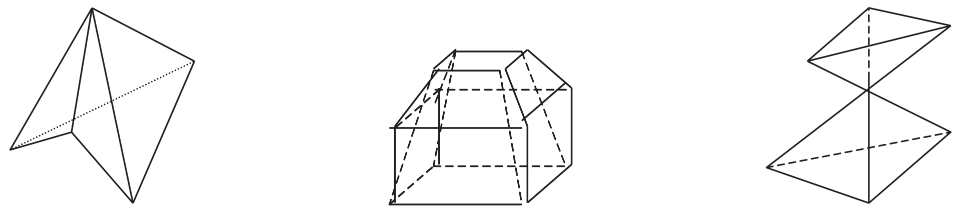
4.2. 在發現中注意科學方法與態度的培養

我們強調發現的過程, 並不是目的, 而是將其作爲載體, 滲透數學思想方法及其運用, 培養發現的意識和能力, 培養其科學態度和方法。因爲在發現過程中, 會遇到很多困難和挫折, 特別表現爲發現過程中我們樸素的猜想會面臨種種反例。這時, 一般人會深怕失去這種信念後會擾亂我們感情上的平衡, 容易出現兩種態度, 或不珍惜猜想否定之, 或不正視矛盾固執已見。而這恰是與科學家的態度區別之處, 所以此時正是我們培養科學態度的最佳時機。這科學態度就是歸納的科學態度, 即 (i) 準備重新審察我們的任何結論; (ii) 有充分理由說明應當改變的, 就毅然改變; (iii) 爲沒有充分根據, 則不隨意改變, 而應當堅持。這幾點聽起來非常平凡, 然而實行起來, 卻需要相當不尋常的品質, 第一點需要"理智上的勇氣", 第二點需要"理智上的誠實", 第三點需要"明智的克制", 這些都是科學家應有的品質[8]。與此同時也應培養改進猜想的方法。比如在歐拉公式的教學中, 首先用合情推理的方法得到了兩個"樸素的猜想"—— (a) 在凸面體中 $V+F-E=2$。(b) 在多面體中 $V+F-E=2$。從數學發現的邏輯講, 兩種不同的猜想, 有兩種不同的改進方法。

(1) 對於"在多面體中 $V+F-E=2$", 圖 10 中的圖形 (1) 滿足此猜想而圖形 2、3 則是"全局性的反例", 它們對於猜想可能是致命的。這時容易出現兩種極端情形: (a) 全盤否定猜想, (b) 把凹面體作爲怪物打發掉, 把前提極爲保險地撤到安全地帶—— 凸面體。對此, 我們要採用的方法是"通過證明分析法去找出其中癥結, 也即應當努力確定應對反例出現負責的引理, 這樣, 通過引入適當的前提, 我們就獲得改進後的猜想"[9]。這時我們要做的具體工作之一是找出問題2中的圖形1與圖形 2、3 的區別, 進而得到改進後的猜想"在單連體中 $V+F-E=2$"。

(2) 對於"在凸面體中 $V+F-E=2$", 圖形 (1) 雖不符合其條件而滿足其結論, 是"局部性的反例"。此時我們不應滿足已有的成果, 將凸面體擴充, 應採用的方法是"設法用未被否證的引理換掉被駁倒的引理, 來改進你的證明分析, 使它們不再是反例"[9]。這裡我們要做的具體

工作之一是找出問題2的圖形1與問題1的共同點, 也得到改進的猜想爲“在單連體中 $V+F-E=2$”。



(1)　(2)　(3)

圖10

4.3. 在發現中注意學習方式的培養

楊振寧曾講:“中國留學生之所以考試後做研究工作的不安、著急, 主要是因爲需要走的路與他 (她) 們過去的學習方法不同, 過去的學習方法是人家指出來的路你在走, 新的學習方法是要自己去找路”[10]。爲迎接21世紀帶來的挑戰, 我們必須改變“過於強調接受學習、死記硬背、機械訓練” 的教學方式, 大力倡導“主動參與、樂於探究、交流合作”的學習方式。在發現中學習是培養“主動 · 探究 · 合作” 學習方式的高層次教學平臺。我們必須轉變原有的教學觀念, 在教學中恰當地設置“發現”, 使學生可以有充分的時間和空間, 饒有興趣地主動參與、大膽地探索、科學地求證。要鼓勵學生勇於發表獨特的見解, 也要幫助學生學會聽取和吸納他人的意見和長處, 善待同學, 使學生最終養成具有創新能力的學習方式。

五. 凸現數學美的教育, 提高審美能力

“由於數學是一門十分抽象的純理性科學, 尤其是高等數學, 有它特定的一系列符號表現形式及遠離日常生活的抽象術語, 因而使許多人都以爲數學是一門枯燥無味而嚴酷的學科, 似乎與美育無關。實際, 數學是一門最美的科學 (19世紀的大數學家高斯就說過數學是科學的皇后), 它對於塑造優美的人性來說, 有著意想不到的作用與功效”, “數學美的特徵與人們的審美準則是一致的, 具體表現爲簡單性、統一性、和諧性、對稱性、奇異性等”[11]。良好的數學素養必然會促進人們審美能力的提高。荷蘭版畫家埃舍爾作品, 開始遭到同行們的冷遇, 是數學家和物理學家首先發現他的價值, 發現了它給予人們哲理性的啓發, 才使埃舍爾登堂入室。數學美又往往是數學家創新的動力和追求, 在求美中求眞, 是數學發展中的普遍現象。而求美致善又是一條修身養性的“公理”。因此, 數學具有重要的美育功能, 加強數學美的教育, 成爲發揮文化教育功能的重要途徑。數學美是 MM 的一個重要因子, 它總是伴隨著其他因子在啓迪和影響著文化素質的形成和提高。

5.1. 加強數學美的教育, 我們在教學中應幫助、指導學生去發現和感受數學美的一面

“數學美是一種科學美, 是潛藏於自然的感性美之後的理性美, 而理性美是具有理性的人才能把握的”。因而對數學美鑒賞能力不加以培養, “外行”就連“熱鬧”也會看不成的。我們在教學中, 一方面不能用空洞地冠以美的名詞, 應是“隨風潛入夜, 潤物細無聲”。比如在教學中講授:“=”的簡潔直觀, 人人都喜歡用它; $a+b=b+a$ 不須任何語言的贅述, 地球人都可以解讀其中所蘊含的意義; 古中國、古巴比倫、古希臘在不同的文化背景下竟然都獨自發現“完全一樣”的畢氏定理, 這樣奇妙的巧合, 促使科學家用它作爲與外星人對話的語言等都有助於對數學美欣賞力的培養。

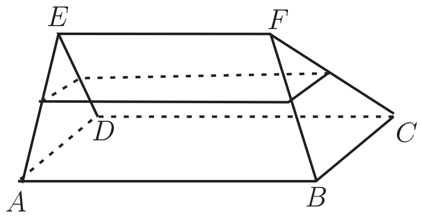


圖11

另一方面, 也要適時造成與原有認知結構的碰撞, 產生心靈的震撼, 從而感受數學美。比如體積、面積的計算學生常感到公式難記, 計算繁冗。1999年高考題: 求如圖的一個幾何體的體積, 其中線段 EF 平行於底面正方形 $ABCD$ 所在的平面, 已知線段 EF 到正方形 $ABCD$ 的距離爲 2, 正方形 $ABCD$ 的邊長爲3, 線段 EF 的長爲 3/2, 求其體積。此題的計算要平行移動線段 EF, 或對幾何體施行某些“割補術”等, 比較繁瑣的。我們在講解時用了被現行中學教材棄之不用的擬柱體體積公式 $v=\frac{1}{6}(s_{上}+4s_{中}+s_{下})$, 顯然, 它的中截面是矩形, 面積易求, 而上底面積爲0, 下底面積爲9, 故立即由擬柱體公式可得

$$v=\frac{1}{6}\times 2\times(0+4\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{3}{2}+9)=\frac{15}{2}.$$

這一公式統一了多少幾何體的體積!它本身就具有結構美、對稱美和簡潔美的形式, 如用它求三角形的面積就是

$$S=\frac{1}{6}\times h\times(0+4\times\frac{1}{2}a+a)=\frac{1}{2}ab.$$

用它來求球的體積則是 $V=\frac{1}{6}\times 2R\times(0+4\times\pi R^2+0)=\frac{4}{3}\pi R^3$。更爲重要的是它在積分學上就是辛普生公式。“會當淩絕頂, 一攬衆山小”的美感便會油然而生, 也使我們對這個“能量級” 很高的萬能公式體驗得更加深刻。

5.2. 加強數學美的教育, 要引導學生用數學美去學習, 去探索創新

尋求題目簡潔解法, 探索台體、錐體、球體體積的統一公式, 對某些定理的新穎證法追求等, 都是行之有效的做法。教師爲進行美育, 在“球體積公式”的教學中, 有意識地將同底 (半徑

爲 R)、等高 (等於R) 的圓錐、半球和圓柱體積間的關係 $V_{圓錐} < V_{半球} < V_{圓柱}$ 改寫爲 $\frac{1}{3}\pi R^3 < \underline{?}\pi R^3 < \frac{3}{3}\pi R^3$ 從而引發學生進行美的選擇 $V_{半球} = \frac{2}{3}\pi R^3$, 進而得到球體積公式 $V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3$, 然後再加以證明[12]。

學生有時在無意識下會運用數學中的美學方法即運用一種形象的直覺, 我們應敏銳地發現, 並加以鼓勵。筆者一次在批閱試題:

“設過點 $P(3,2)$ 的直線 l 與 X軸、Y 軸的正半軸分別交於 A點、B點。求 $\triangle AOB$ 面積的最小值及此時直線 l 的方程” 時, 忽然見到這樣一個解答:

當直線 l 垂直於 X 軸即 $x = 3$ 時, 面積 $s_\triangle$ 最大。當直線 L 過原點時, 面積 s 取得最小值零。所以面積 $s_\triangle$ 最小時直線 L 過點 $(6,0)$。同理直線 L 過點 $(0,4)$, 所求直線 L 方程爲 $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$, 所以面積 $s_\triangle$ 有最小值12。

這簡直是匪夷所思, 一派“胡言”。但結果的正確及對稱思想的應用 (意料之外) 又使我們深深的思索。我們與作該解答的學生交談。該生作了如下說明;

$$\text{對於} \qquad y = x + \frac{1}{x} \qquad \cdots\cdots \text{(i)}$$

有如下的結論, 在區間 $(0,+\infty)$ 上, 當 $x = 1$ 時, 有極小值 $y = 2$;

在區間 $(-\infty,0)$ 上, 當 $x = -1$ 時, 有極大值 $y = -2$ $\cdots\cdots$ (ii)

我還發現其中 $x = 1$ 與 $x = -1$ 是關於 $x = 0$ 對稱, 而 $x = 0$ 時無意義 $\cdots\cdots$ (iii)

在此題中, 若設爲直線 L 在 X、Y 軸上的截距分別爲 a、b, 考察 $S = \frac{1}{2}ab$ $\cdots\cdots$ (iv) (波利亞語: 先解決一個更普遍的的問題—筆者注, 以下同)。用 a 表示 b, 則 (iv) 可以轉化爲 (i) 的形式 ($S = a - 3 + \frac{9}{a-3} + 6 \quad \cdots\cdots$ (v))。

顯然, $a = 3$ 時, (v) 式無意義 (三角形面積爲最大 ∞); 在區間 $(-\infty,3)$ 上, 當 $a = 0$ 時, S 取得極大值 0 (即三角形面積取得最小值), 所以用上面的結論 (ii)(iii), 那麼在區間 $(3,+\infty)$ 上, 直線 L 過 $a = 0$ 關於 $a = 3$ 的對稱點 $a = 6$ 時 S 有極小值, 即三角形 AOB 的面積取得最小值。

筆者聽後感到一種震憾, 一種欣喜。震撼的是學生竟有如此豐富的想象力, 提出如此富有創意的新解法, 欣喜的是看到了數學美的教育對學生素質發展的促進, 在學習中能發現數學美的因素, 又在後繼學習中大膽地用美去探索、發現。

5.3. 加強數學美的教育要與文學、音樂、繪畫等藝術美的教育相結合, 使之相互溝通, 協手共進

在“孤帆遠影碧空盡, 唯見長江天際流”中領悟極限意境的優美, 在“一風三日吹倒山, 白浪高於瓦官閣”中感受對稱變換的美妙等。也可以在學習“孫子算題”的解法“三人同行七十稀, 五樹梅花廿一枝, 七子團圓正月半, 除百零五便得知”中領略中華詩詞的優美。

5.4. 加強數學美的教育, 要注意與教學內容的有機結合, 使學生在學習中受到美的熏陶, 在對美的追求中, 提高數學品質。

下面是在圓的單元中與學生討論的內容:

(1) 用圓形紙片演示, 圓周上的任意兩點, 不僅都能沿某一直徑對折而重合, 都能繞圓心旋轉某一個角度沿圓周由一點運動至另一點。其他圖形有這種性質嗎? (對稱性及旋轉不變性)

(2) 為什麼大自然偏愛圓形: 各種美麗的花朵、向日葵的子盤、植物的莖, 甚至露水也要呈球形? (自然的也是最美的)

一個實驗: 將一條 (具有固定長度的) 柔軟細絲兩端結起來, 形成一條封閉曲線, 將它輕輕地放在一個蒙有肥皂膜的鐵框內 (圖 12.1), 如果用細針刺破曲線內膜, 這條曲線會如何? 立刻變成一個圓 (圖 12.2)。此圓的面積與所有有相同周長的其他圖形相比是最大的, 反之, 也可以說, 在所有面積相等的圖形中, 圓有最小周長 (等周原理)。

(3) 圓在生活中的應用。人們需要圓: 與圓有關的生為 (交通、生活、娛樂) 工具如湯圓、茶杯 、車輪、足球等須臾不可缺少。人們喜愛圓, 圓形的裝飾物也是處處可見; 就是在良好的祝願詞中, 合家團圓、圓圓滿滿等含圓的也是使用頻率極高的; 最近有人研究說, 漢字也是近似於圓, 而 非方塊字; 甚至還有關於圓的故事, ...。(應用)[13]

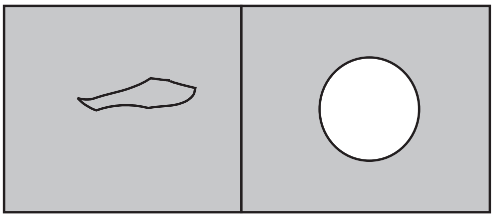


圖 12.1　　圖 12.2

梁貫成先生曾講, "在古代中國, ······ 數學被視為一種雕蟲小技, 而不是學問", 屬於文化系統的從動層面。現代數學來自西方, 它不僅是一種技術意義下的 "工具", 而是與我國固有文化極不相同的一種文化[14]。近現代中國數學教育, 對改善和提高中華民族科學文化素質起了巨大作用。由於在文化心理上我們還是經常不自覺地運用了中國傳統的數學文化觀, 在數學教學中更多地是側重於教育技法的研究, 而對數學文化教育功能研究和關注不夠。在新世紀, "數學文化必須走進課堂, 在實際數學教學中使得學生在學習數學的過程中眞正受到文化的感染, 產生文化共鳴, 體會數學的文化品位和世俗的人情味[15]。而且文化教育功能的作用又不可能像技術教育功能那樣快的顯現出來, 要有充夠的的信心和耐心。正如此, 發揮數學教育在培養人的科學文化素質上的作用, 是一個任重道遠的工程, 如同數學學科本身一樣, 是一個古老而又嶄新的課題。我們要有提高中華民族科學文化素質的責任心, 對發揮數學文化教育功能的教育範式進

行積極地探索、創新, 從數學及其文化特點出發, 發揮理性的力量, 求眞立德, 育美致善, 達到天人合一。

參考文獻

1. 王梓坤, 今日數學及其應用。數學通報 (北京)。1995年1月。
2. 徐利治, 數學史數學教育的結合。數學教育學報 (天津), 1994年1月。
3. 徐瀝泉, 數學方法論與數學教育實驗。數學教育學報 (天津), 1992年12月。
4. 張順燕, 數學與文化。數學通報 (北京), 2001年1月。
5. 教育部《中學數學實驗教材》研究組編, 代數第一冊。2000年1月。
6. 丘維聲, 要重視科學思維方式的培養。數學通報 (北京), 2000年1月。
7. 梁穎、張麗 (實驗班班學生), 關於求拋物線方程的一點思考及其它。中學數學數學教學參考 (西安), 1992年6月。
8. 波利亞著, 李心燦譯, 數學與猜想 (第一卷)。北京科學出版社, 1991年1月。
9. 鄭毓信, 數學方法論。南寧廣西教育出版社, 1991年1月。
10. 楊振寧, 楊振寧文集 (上)。上海華東師範大學出版社, 1998。
11. 徐利治, 科學文化人與審美意識。數學教育學報 (天津), 1997年1月。
12. 陳漢治, 既教證明, 又教猜想—“球體積公式”的教學設計。中學數學 (武漢), 1990年10月。
13. 楊世明, 數學發現的藝術。青島海洋大學出版社, 1998。
14. 齊民友, 中國人眼中的歐幾裡德《幾何原本》。數學教育學報 (天津), 2003年1月。
15. 張奠宙, 數學文化的一些新視角。數學教育學報 (天津), 2003年1月。

—本文作者任教於中國無錫市梅梁中學—