多元函數積分的幾種特殊解法

蘇化明 · 潘　杰

摘要. 本文介紹了多元函數積分計算中的幾種特殊解法: 三重積分的 “先二後一” 法; 重積分的等値面 (線) 法; 重積分及曲面積分的微元法。

關鍵詞. 多元函數積分、“先二後一” 法、等値面 (線) 法、微元法、面積、體積。

多元函數積分一般是指曲線積分、曲面積分、二重及二重以上的積分。這一類積分的計算往往是根據積分的定義、積分的幾何意義或物理意義、積分的變量替換等方法轉化成計算一個或若干個定積分來完成的。

衆所周知, 一個積分量是由積分區域及積分的被積函數決定的。因而當積分的積分區域或被積函數具有某種特殊性時, 我們也可採用特殊的方法去求解。本文的目的就是介紹幾種較特殊的方法來求解一類具有特殊性的多元函數數積分。需要說明的是, 文中所引的例子均有其他解法, 讀者不妨將其他解法與本文所給解法作一比較。

一. 三重積分的 “先二後一” 法

三重積分可以通過轉化爲三個累次積分進行計算。但當用垂直於某一坐標軸 (如 z 軸) 的平面去截積分區域所得的截面有某種規律時, 則可先在截面上積分, 然後再關於 z 積分, 這種先計算某兩個變量的二重積分再計算另一個變量積分的方法通常稱爲 “先二後一” 法或 “先重後單” 法, 也稱 “坐標軸投影法”, 而這種方法實質上是定積分中用截面法求體積方法的推廣。

設 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D(z), z_1\le z\le z_2\}$, 其中 $D(z)$ 是 x, y 平面上隨 z 連續變化的有界閉區域 (如圖1所示)。如果 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界可積, 對任意的 $z\in[z_1,z_2]$, $f(x,y,z)$ 作爲 x, y 的函數在 $D(z)$ 上可積, 則

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_1}^{z_2}dz\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)dxdy, \tag{1}$$

其中 $D(z)$ 是用垂直於 z 軸的平面 $z=z$ 與 Ω 相交的截面。

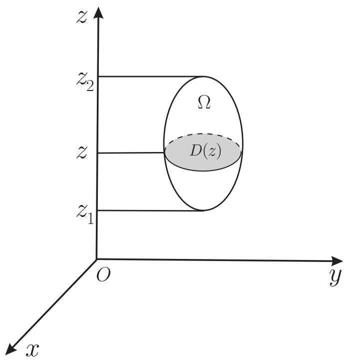

圖 1

註: (i) 這個公式從物理上可以給出這樣的解釋: 把 Ω 看作是一個空間物體, $f(x,y,z)$ 爲物體在 Ω 上的分布密度, (1) 式左端的三重積分即物體的質量, 而 (1) 式右端則表示先把物體切成薄片, 再把所有薄片的質量累積起來, 故這種方法也稱爲 “切片法”。

(ii) 這種方法也適用於垂直 x 軸或 y 軸的平面與 Ω 相截而得到的積分公式。

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{D(x)} f(x,y,z)dydz, \tag{2}$$

其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D(x), x_1 \le x \le x_2\}$。

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{y_1}^{y_2} dy \iint\limits_{D(y)} f(x,y,z)dxdz, \tag{3}$$

其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D(y), y_1 \le y \le y_2\}$。

例1. 計算三重積分: $I = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2az,\ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2\}$ $(a>0)$。

解: 解方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2az, \\ x^2+y^2+z^2 = 3a^2, \end{cases}$$

得 $z=a$, $z=-3a$ (捨去)。

平面 $z=a$ 把閉區域 Ω 分成兩部分, 記上半部分爲 Ω_1, 下半部分爲 Ω_2 (圖2), 在 Ω_1, Ω_2 上分別運用 “先二後一” 法, 則有

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2+z^2)dxdydz \\ &= \int_a^{\sqrt{3}a} dz \iint\limits_{D_1(z)} (x^2+y^2+z^2)dxdy + \int_0^a dz \iint\limits_{D_2(z)} (x^2+y^2+z^2)dxdy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^{\sqrt{3}a} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} (r^2+z^2) r dr + \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2az}} (r^2+z^2) r dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_a^{\sqrt{3}a} (9a^4 - z^4) dz + 2\pi \int_0^a (a^2 z^2 + a z^3) dz \\
&= \frac{1}{5} \pi a^5 \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right).
\end{aligned}
$$

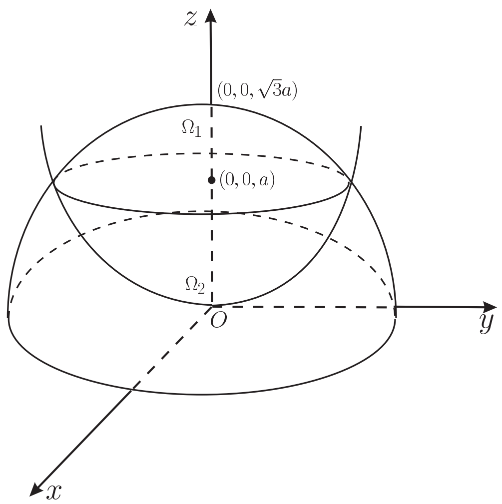

圖 2

例2. 求曲面 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2=\frac{x}{h}$ 所圍立體體積。

解: 顯然 $x \ge 0$。用垂直於 x 軸的平面去截所給立體, 截口曲線爲一橢圓:

$$D(x): \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\sqrt{\frac{x}{h}}-\frac{x^2}{a^2}.$$

因爲 $\sqrt{\frac{x}{h}}-\frac{x^2}{a^2} \ge 0$, 所以 $0 \le x \le (\frac{a^4}{h})^{\frac{1}{3}}$。

記 $x_0=(\frac{a^4}{h})^{\frac{1}{3}}$, $\lambda^2=\sqrt{\frac{x}{h}}-\frac{x^2}{a^2}$ $(x \ne 0)$, 則上面的橢圓方程即爲:

$$\frac{y^2}{(\lambda b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda c)^2}=1.$$

此橢圓所圍的面積爲 $\pi\lambda^2 bc=\pi bc(\sqrt{\frac{\pi}{h}}-\frac{x^2}{a^2})$, 因此所求立體體積爲

$$V=\int_0^{x_0} dx \iint\limits_{D(x)} dy dz = \pi bc \int_0^{x_0} \left(\sqrt{\frac{x}{h}}-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \frac{a^2}{h}.$$

若將計算三重積分的 “先二後一” 法推廣到計算四重或四重以上積分, 則可有 “先三後一”、“先二後二” 等方法。例如, 求四維空間球體 $x^2+y^2+z^2+t^2 \le a^2$ 的體積, 可用 “先三後一” 的方法。

二. 等値面 (線) 法

我們以三重積分 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 的計算來說明這種方法。

設 $f(x,y,z)=t$ 是函數 $f(x,y,z)$ 的等値面, 又 $\{f(x,y,z)\le t\}\cap\Omega$ 的體積爲 $V(t)$。設 f 在 Ω 上的値域爲 $[\alpha,\beta]$, 在 $[\alpha,\beta]$ 中引進分劃:

$$\alpha=t_0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n=\beta,$$

則和式

$$\sum_{i=1}^n t_i[V(t_i)-V(t_{i-1})] \tag{4}$$

在分劃最大長度 $\|\lambda\|\to 0$ 時的極限爲 I。若 $V(t)$ 爲連續可微函數, 則 (4) 式以 $\int_\alpha^\beta tV'(t)dt$ 爲極限, 故由極限的唯一性知

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_\alpha^\beta tV'(t)dt=\int_\alpha^\beta tdV(t), \tag{5}$$

由此可將三重積分化爲一重積分。

註: 對於二重積分及三重以上的積分有類似結論; 當被積函數是 $f(x,y,z)=t$ 的函數時也有類似結論。

例3. 計算積分 $I=\iint_D(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}})^3dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x\ge 0,y\ge 0,\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\le 1\}$。

解: 設 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=t$ 爲被積函數的等値線, 易知 $0\le t\le 1$。
由 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=t$ 知 $y=b(t^2+\frac{x}{a}-2t\sqrt{\frac{x}{a}})$, 由 $0\le\sqrt{\frac{x}{a}}\le t$ 知 $0\le x\le at^2$。等値線 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=t$ 與坐標軸所圍成圖形面積

$$S(t)=b\int_0^{at^2}\left(t^2+\frac{x}{a}-2t\sqrt{\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{1}{6}abt^4,$$

故 $dS(t)=\frac{2}{3}abt^3dt$, 於是由等値線求積公式知

$$I=\frac{2}{3}ab\int_0^1 t^6dt=\frac{2}{27}ab.$$

例4. 求函數 $f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$ 在橢球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 內的平均値。

解: 設 $\Omega=\{(x,y,z)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 則 Ω 的體積 $\Omega=\frac{4}{3}\pi abc$。
設 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=t$ 爲被積函數的等値面, 則 $0\le t\le 1$。

取 $V(t)=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le t\}$, 則 $V(t)$ 的體積爲

$$V(t)=\frac{4}{3}\pi abct^{\frac{3}{2}},\quad dV(t)=2\pi abc\sqrt{t}dt,$$

於是由等值面求積公式 (5) 知

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=2\pi abc\int_0^1\sqrt{t}e^{\sqrt{t}}dt=4\pi(e-2)abc,$$

從而 $f(x,y,z)$ 在 Ω 的平均值爲

$$\overline{f}(x,y,z)=\frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=3(e-2).$$

三. 微元法

從公式 (5) 可以看出, 利用等值面法將三重積分化爲一重積分可理解爲作變量替換: $f(x,y,z)=t$, 所以我們除了要知道 t 的取値範圍即新的積分變量的上、下限外, 還要知道原來的體積元素 $dxdydz$ 在變量替換下新的體積元素 $dV(t)$。但問題是求 $dV(t)$ 並不那麼簡單, 例如求例3中的 $dS(t)$。但由於 $dV(t)$ (或 $dS(t)$) 是 $V(t)$ (或 $S(t)$) 對 t 微分, 因而啓發我們可直接用微元法求 $dV(t)$ (或 $dS(t)$) 而不必先求出 $V(t)$ (或 $S(t)$) 再去對 t 微分。利用等值面 (線) 法將其他類型的積分 (如曲面積分) 化爲一重積分時也可類似處理。

例5. 設 $f(t)$ 爲連續函數, 證明:

$$\iint\limits_{D} f(x-y)dxdy=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)dt, \tag{6}$$

其中 $A>0$ 爲常數, $D=\{(x,y)\mid |x|\le \frac{A}{2}, |y|\le \frac{A}{2}\}$。

證: 令 $x-y=t$, 則在 D 上, $-A\le t\le A$。如圖3, 直線 $y=x$ 將 D 分成 D_1, D_2 兩部分。在D_1 上, $x-y>0$, 從而 $t>0$。

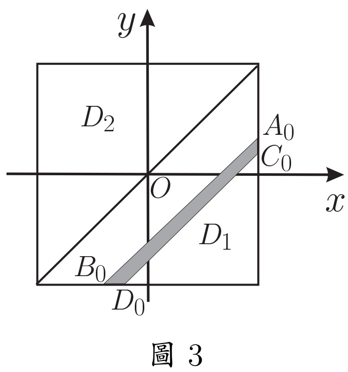

圖 3

如圖3, 設直線 A_0B_0 的方程爲 $x-y=t$, C_0D_0 的方程爲 $x-y=t+dt$ $(dt>0)$。易知 A_0, B_0 的坐標分別爲 $(\frac{A}{2},\frac{A}{2}-t)$, $(-\frac{A}{2}+t,-\frac{A}{2})$, A_0, B_0 兩點間的距離爲 $|A_0B_0|=\sqrt{2}(A-t)$, 坐標原點到直線 A_0B_0 的距離爲 $\frac{|t|}{\sqrt{2}}=\frac{t}{\sqrt{2}}$。

以 $|A_0B_0|$ 爲長, $\frac{dt}{\sqrt{2}}$ 爲寬的矩形面積作爲面積元素 $dS(t)$, 即

$$dS(t)=\sqrt{2}(A-t)\frac{dt}{\sqrt{2}}=(A-t)dt,$$

從而在 D_1 上, 有

$$\iint\limits_{D_1} f(x-y)dxdy=\int_0^A f(t)(A-t)dt.$$

同理可知, 在 D_2 上有

$$\iint\limits_{D_2} f(x-y)dxdy=\int_{-A}^0 f(t)(A+t)dt \quad (t<0),$$

於是 $\iint_D f(x-y)dxdy=\iint_{D_1} f(x-y)dxdy+\iint_{D_2} f(x-y)dxdy=\int_{-A}^A f(t)(A-|t|)dt$。

由本題結論不難證明:

設 $f(x)$ 爲連續偶函數, 則有

$$\iint\limits_{D} f(x-y)dxdy=2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du, \tag{7}$$

其中 $a>0$ 爲常數, $D=\{(x,y)\mid |x|\le a,|y|\le a\}$。

例6. 求三重積分 $I=\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x+y+z\le 1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$。

解法 1 (等值面法): 設 $x+y+z=t$ 爲被積函數的等值面, 易知 $0\le t\le 1$。

取 $V(t)=\{(x,y,z)\mid x+y+z\le t,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$, 則 $V(t)$ 的體積爲 $V(t)=\frac{1}{6}t^3$, 從而 $dV(t)=\frac{1}{2}t^2dt$, 所以

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2}{(1+t)^3}dt=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

解法 2 (微元法): 設 $x+y+z=t$, 則 $0\le t\le 1$。被積函數的等值面 $x+y+z=t$ 與 Ω 交成一個邊長爲 $\sqrt{2}t$ 的等邊三角形, 其面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$。坐標原點到三角形所在平面的距離爲 $\frac{t}{\sqrt{3}}$。用柱體體積近似代替平面 $x+y+z=t$, $x+y+z=t+dt$ $(dt>0)$ 與第一卦限圍成封閉區域 (臺體) 的體積作爲體積元素 $dV(t)$ (積分方向沿矢量 $\mathbf{n}=\{1,1,1\}$ 的方向), 即

$$dV(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}t^2dt,$$

以下同解法1。

例7. 證明 Poisson 公式:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du, \tag{8}$$

其中 a, b, c 爲常數, $\sum=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$。

證: 不妨假定 a, b, c 不同時爲零, 令 $ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}u$, 則由 Cauchy–Schwarz 不等式知

$$(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = a^2+b^2+c^2,$$

故 $-1\le u\le 1$。

坐標原點到平面 $\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=u$ 的距離爲 $h=|u|$。兩平面 $\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=u$ 與 $\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=u+du$ $(du>0)$ 之間的距離爲 $dh=du$, 取它們截 $\sum$ 所得球帶面積爲面積元素 $dS(u)$ (積分方向沿矢量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\{a,b,c\}$ 的方向), 即 $dS(u)=2\pi du$, 從而

$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du. \tag{8}$$

例8. 設函數 $f(z)$ 在圓錐面 $\sum=\{(x,y,z)\mid z=a\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le h\}$ 上連續 ($a>0$ 爲常數), 證明:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(z)dS = \frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h zf(z)dz. \tag{9}$$

證: 取 $z=t$ 爲被積函數的等値面, 則 $0\le t\le h$。考慮圓錐面 $\sum$ 夾在平面 $z=t$ 與 $z=t+dt$ $(dt>0)$ 之間部分的面積。

曲面 $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ 可視爲 xOz 平面上的直線 $z=ax$ $(z\ge 0)$ 繞 z 軸旋轉一周而生成。由旋轉體側面積公式知所考慮的面積爲

$$2\pi\int_t^{t+dt}\frac{z}{a}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}dz = \frac{\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}[2tdt+(dt)^2],$$

故面積元素 $dS(t)=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}tdt$, 於是

$$\int\int_{\Sigma} f(z)dS = \frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h tf(t)dt = \frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h zf(z)dz. \tag{9}$$

類似可證:

設函數 $f(z)$ 在旋轉拋物面 $\sum = \{(x,y,z) \mid z = a(x^2+y^2), 0 \le z \le h\}$ 上連續 ($a > 0$ 爲常數), 則

$$\iint_{\Sigma} f(z)dS = \frac{\pi}{a}\int_0^h f(z)\sqrt{1+4az}dz.$$

參考文獻

1. 謝惠民, 惲自求, 易法槐, 錢定邊, 數學分析習題課講義 (下册), 北京: 高等教育出版社, 2004。
2. 吳良森, 毛羽輝, 數學分析習題精解 (多變量部分), 北京: 科學出版社, 2004。
3. 同濟大學應用數學系, 微積分 (下册), 北京: 高等教育出版社, 2000。
4. 沈運彤, 葉牡才, 苑金臣, "先重後單" 法用於求空間曲面所圍立體的體積, 數學學習, 1998年第1期。
5. 馬娜蕊, 對三重積分"先二後一" 計算方法的討論, 高等數學研究, 2000 年第1期。
6. 姚允龍, 數學分析, 上海: 復旦大學出版社, 2002。
7. Γ. M. 菲赫金哥爾茨著, 路見可譯, 微積分學教程 (第三卷第一分册), 北京: 人民教育出版社, 1978。
8. Γ. M. 菲赫金哥爾茨著, 吳親仁, 路見可譯, 微積分學教程 (第三卷第二分册), 北京: 人民教育出版社, 1978。
9. B. ∏. 吉米多維奇著, 李榮凍譯, 數學分析習題集, 北京: 人民教育出版社, 1978。

—本文作者任教於中國安徽省合肥工業大學數學與信息科學系—