

# 鬼腳圖的分析

歐迪興

## 一. 前言

鬼腳圖是一種遊戲，常被拿來當作抽籤的方式。遊戲的玩法為：首先畫幾條縱線，以縱線的頂端為起點，底端為終點，終點處寫上抽籤的項目。然後在縱線間任意畫一些橫線，但每條橫線不得穿越縱線。最後每個人選一個起點開始往下走，若遇到橫線則沿著橫線走到隔壁的縱線，最後到達終點就是抽籤所抽中的項目。本文利用代數及排列組合的方法，建構一套數學模型來分析鬼腳圖的各種性質，並且檢驗是否為一種公正的抽籤方式。

## 二. 預備知識

進入主題前，先簡單介紹一些排列 (permutation) 的基本定義及性質。

定義1: 若  $\phi : A \rightarrow A$  為一對一映成函數，則  $\phi$  是集合  $A$  的排列。

例1: 函數  $\phi(x) = \begin{cases} 3, & \text{當 } x = 1 \\ 1, & \text{當 } x = 2 \\ 2, & \text{當 } x = 3 \end{cases}$  是一個排列，通常我們用  $\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  來表

示。

定義2: 若排列  $\phi : A \rightarrow A$  稱為一個  $k$ -循環 (cycle)，則有  $k$  個相異元素  $i_1, \dots, i_k \in A$  使  $i_1 \xrightarrow{\phi} i_2 \xrightarrow{\phi} \dots \xrightarrow{\phi} i_k \xrightarrow{\phi} i_1$ ，且對於其他的  $x \in A$ ， $\phi(x) = x$ 。我們可以用循環表示法  $\phi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  來表示。

例2: 例1中的  $\phi$  是一個循環，我們可以用循環表示法  $\phi = (1, 3, 2)$  來表示。

定義3: 一個2-循環稱為移項 (transposition)。

定義4: 可以表示成奇數個移項函數合成的排列稱為奇排列 (odd permutation)，可以表示成偶數個移項函數合成的排列稱為偶排列 (even permutation)。

有限元素之集合  $A$  的任意排列, 可以寫成有限個移項的合成, 且排列不能同時為奇排列及偶排列。

例3: 例1中  $\phi = (2, 3) \circ (1, 2) = (1, 2) \circ (1, 3)$ , 因此  $\phi$  為偶排列。

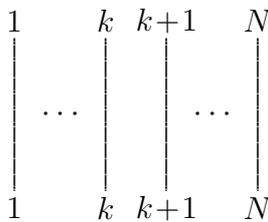
有關於其他更深入詳細的內容, 可參閱參考資料 [1]。

### 三. 建構數學模型

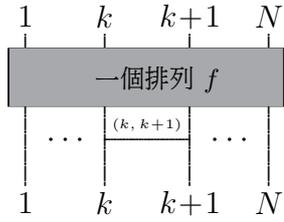
首先觀察最簡單的空白鬼腳圖, 如圖一所示, 有  $N$  條縱線且沒有橫線, 它的對應關係  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ 1 & 2 & \cdots & N \end{pmatrix}$  是一種排列。對於任意對應關係為排列  $f$  的鬼腳圖, 若在終點前任意加上一條橫線, 如圖二, 此橫線連接第  $k$  與第  $k+1$  條縱線, 則新的鬼腳圖的對應關係為  $(k, k+1) \circ f$  的一個排列函數。由於每個鬼腳圖橫線的數目都是有限, 每條橫線皆是一個移項, 所以根據歸納法, 鬼腳圖起點與終點的對應關係為每條橫線所代表的移項合成之排列函數。本文將利用移項的運算做為探討鬼腳圖性質的基本工具。

例4: 圖三中的鬼腳圖, 由上而下橫線分別是  $(2,3), (1,2), (4,5), (3,4), (2,3), (3,4), (1,2)$  的移項。此鬼腳圖起點與終點的對應關係可表示成下列移項之合成

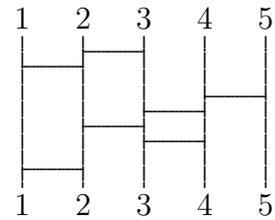
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2) \circ (3, 4) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 5) \circ (1, 2) \circ (2, 3).$$



圖一. 空白鬼腳圖。



圖二. 鬼腳圖加一條線。



圖三. 一個鬼腳圖的範例。

### 四. 鬼腳圖的基本性質

令  $G_N$  為所有  $N$  條縱線鬼腳圖所構成的集合, 藉由前文的討論可知  $G_N$  本身具有的群性質, 可得

定理1:  $G_N$  是一個由生成集 (generating set)  $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (N - 1, N)\}$  所生成的排列群 (permutation group)。

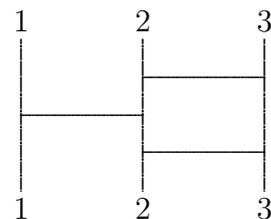
由於每個鬼腳圖可寫成一個排列, 根據排列的定義可得

引理 2: 鬼脚圖的起點與終點為一對一映成關係。

因此每個抽籤的項目只有一個人會抽到, 且每個抽籤的項目都一定會被抽到。

再分析  $N$  條縱線鬼脚圖可以造出多少種不同的對應關係。根據定理 1, 已知  $G_N$  為  $S_N$  (Symmetric group on  $n$  letters) 的子群, 所以  $N$  條縱線鬼脚圖上造出的對應關係個數必小於等於  $N!$ 。是否  $G_N$  的生成集足以生成整個  $S_N$ ? 答案是肯定的。

首先觀察最簡單的情形  $N = 3$ ,  $G_3$  的生成元素為  $(1, 2)$  和  $(2, 3)$ 。圖四中, 移項  $(1, 3) = (2, 3) \circ (1, 2) \circ (2, 3)$  是由生成元素所構成, 所以  $(1, 3) \in G_3$ 。因為  $G_3$  內包含  $S_3$  所有的移項  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  及  $(2, 3)$ , 而且  $S_3$  內的每個排列都是有限個數移項的合成, 因此  $G_3 = S_3$ 。可以利用這個方法將結果推廣到任意給定的  $N$  值。



圖四. 利用  $G_3$  的生成元素合成移項  $(1, 3)$ 。

預理 3: 若  $1 \leq m < n \leq N$ , 則  $(m, n) \in G_N$ 。

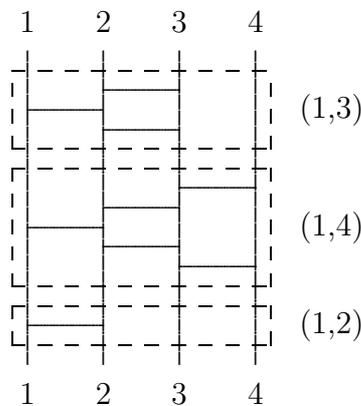
證明: 令  $1 \leq m < N$ 。當  $n = m + 1$  時, 因為  $(m, m + 1)$  為  $G_N$  的生成元素, 所以  $(m, m + 1) \in G_N$ 。若  $n = m + k < N$  時,  $(m, m + k) \in G_N$ 。當  $n = m + k + 1 \leq N$  時, 因為  $(m, m + k) \in G_N$ , 且  $(m + k, m + k + 1)$  為  $G_N$  的生成元素, 所以  $(m, m + k + 1) = (m + k, m + k + 1) \circ (m, m + k) \circ (m + k, m + k + 1) \in G_N$ 。根據數學歸納法, 得證。

由預理 3,  $G_N$  的生成元素可生成  $S_N$  中的每個移項, 也就可以生成  $S_N$  中的每個排列, 可得到

定理 4:  $G_N = S_N$ 。

此定理告訴我們, 任何排列都可以利用足夠多的橫線來畫出所對應的鬼脚圖。

例 5: 若要於 4 條縱線上造出對應關係為  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  的一個鬼脚圖, 首先將  $f$  分解成數個移項的乘積, 例如  $f = (1, 2) \circ (1, 4) \circ (1, 3)$ 。如圖五所示, 分解出的移項  $(1, 3)$  畫在鬼脚圖的頂端,  $(1, 3)$  橫線的下畫出  $(1, 4)$ ,  $(1, 4)$  橫線的下畫出  $(1, 2)$ , 圖五就是造出對應關係為  $f$  的一個鬼脚圖。一般而言, 造出鬼脚圖  $f$  的方法並非唯一, 下文將討論鬼脚圖的方法數。

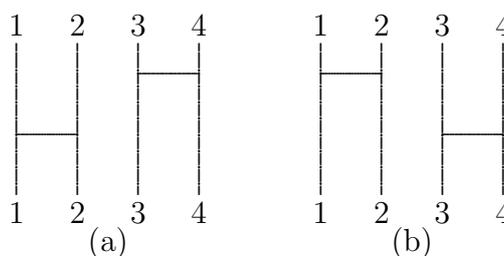


圖五.  $(1, 2) \circ (1, 4) \circ (1, 3)$  的圖例。

### 五. 固定橫線數, 組成特定對應關係鬼腳圖的方法數

由前面的部分可知, 給定任意的排列  $a$ , 都可以用有限條橫線畫出對應關係為  $a$  的鬼腳圖, 問題是最少需要多少條橫線才足夠畫出? 若橫線數目足夠, 總共有多少種不同的畫法?

爲了簡化問題, 首先假設鬼腳圖的橫線有順序性, 如圖六所示, 把 (a) 與 (b) 看作是不同的鬼腳圖。假設共有  $N$  條縱線, 令  $n_t(a)$  爲畫  $t$  條橫線時, 可造出對應關係為  $a \in G_N$  鬼腳圖的方法數; 若  $t$  條橫線不能造出對應關係為  $a$  的鬼腳圖, 則  $n_t(a) = 0$ 。當最靠近終點的橫線是  $(1,2)$ , 造出鬼腳圖



圖六. 鬼腳圖橫線順序性的圖例。

$a$  的方法數為  $n_{t-1}((1,2)^{-1} \circ a)$ ; 當最靠近終點的橫線是  $(2,3)$ , 造出鬼腳圖  $a$  的方法數為  $n_{t-1}((2,3)^{-1} \circ a)$ ; 以此類推, 可算出最靠近終點的橫線為其他不同移項時, 鬼腳圖  $a$  的畫法數。而所有造出  $a$  的方法數, 就是將靠近終點橫線所有可能性的方法數通通加起來, 得到下面的遞迴關係式:

$$n_t(a) = n_{t-1}((1,2)^{-1} \circ a) + n_{t-1}((2,3)^{-1} \circ a) + \dots + n_{t-1}((N-1, N)^{-1} \circ a), \quad (1)$$

$$\text{當 } t = 1 \text{ 時, } n_1(a) = \begin{cases} 1, & \text{若存在整數 } k < N \text{ 使得 } a = (k, k+1) \\ 0, & \text{若 } a \text{ 爲其他排列} \end{cases}$$

因此對於  $t \geq 2$ , 可以利用遞迴式由  $t = 2$  開始計算, 即可求出  $n_t(a)$  的值。

計算遞迴式子是一件麻煩的工作, 要先對每個不同參數的結果逐一計算, 最後才能得到答案, 下面將簡化  $n_t(a)$  的運算方式。之前已證明  $G_N = S_N$ , 所以  $G_N$  的元素個數為  $N!$ , 令  $g_1, g_2, \dots, g_{N!}$  爲  $G_N$  的所有元素。根據定義,  $n_1(g)$  的值表示  $g$  是否爲  $G_N$  的生成元素; 若  $g$  是生成元素, 則  $n_1(g) = 1$ ; 若不是, 則  $n_1(g) = 0$ 。式 (1) 可展開成

$$\begin{aligned} n_t(a) &= n_{t-1}(g_1^{-1} \circ a) \times n_1(g_1) + n_{t-1}(g_2^{-1} \circ a) \times n_1(g_2) + \dots + n_{t-1}(g_{N!}^{-1} \circ a) \times n_1(g_{N!}) \\ &= \sum_{g \in G_N} n_{t-1}(g^{-1} \circ a) \times n_1(g) \end{aligned} \quad (2)$$

令  $k = \phi(g) = g^{-1} \circ a$ , 因爲  $G_N$  爲群, 存在唯一解  $g = a \circ k^{-1}$ , 所以  $\phi: G_N \rightarrow G_N$  是一對一映成函數, 式 (2) 變成

$$n_t(a) = \sum_{k \in G_N} n_{t-1}(k) \times n_1(a \circ k^{-1}) \quad (3)$$

將式 (3) 函數  $n_t(a)$  分別代入所有  $G_N$  的元素, 得到下面方程組

$$\begin{cases} n_t(g_1) = n_1(g_1 \circ g_1^{-1}) \times n_{t-1}(g_1) + n_1(g_1 \circ g_2^{-1}) \times n_{t-1}(g_2) + \cdots \\ \quad \quad \quad + n_1(g_1 \circ g_{N!}^{-1}) \times n_{t-1}(g_{N!}) \\ n_t(g_2) = n_1(g_2 \circ g_1^{-1}) \times n_{t-1}(g_1) + n_1(g_2 \circ g_2^{-1}) \times n_{t-1}(g_2) + \cdots \\ \quad \quad \quad + n_1(g_2 \circ g_{N!}^{-1}) \times n_{t-1}(g_{N!}) \\ \vdots \\ n_t(g_{N!}) = n_1(g_{N!} \circ g_1^{-1}) \times n_{t-1}(g_1) + n_1(g_{N!} \circ g_2^{-1}) \times n_{t-1}(g_2) + \cdots \\ \quad \quad \quad + n_1(g_{N!} \circ g_{N!}^{-1}) \times n_{t-1}(g_{N!}) \end{cases}$$

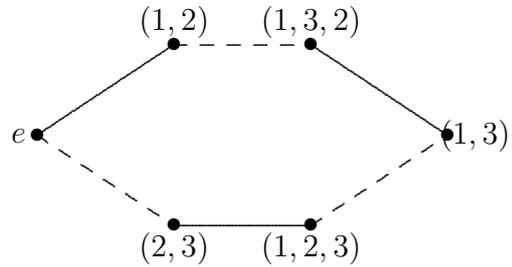
$$\text{令 } M = \begin{pmatrix} n_1(g_1 \circ g_1^{-1}) & n_1(g_1 \circ g_2^{-1}) & \cdots & n_1(g_1 \circ g_{N!}^{-1}) \\ n_1(g_2 \circ g_1^{-1}) & n_1(g_2 \circ g_2^{-1}) & \cdots & n_1(g_2 \circ g_{N!}^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_1(g_{N!} \circ g_1^{-1}) & n_1(g_{N!} \circ g_2^{-1}) & \cdots & n_1(g_{N!} \circ g_{N!}^{-1}) \end{pmatrix}, m_t = \begin{pmatrix} n_t(g_1) \\ n_t(g_2) \\ \vdots \\ n_t(g_{N!}) \end{pmatrix},$$

可用矩陣方程式  $m_t = Mm_{t-1}$  來表示上面的方程組。令  $g_1 = e$ ,  $m_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$  ( $T$  為矩陣的轉置), 則  $m_1 = Mm_0$ , 可求得通式

$$m_t = M^t m_0. \tag{4}$$

考慮  $G_N$  的 Cayley graph  $G = (S_N, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (N-1, N)\})$ , 利用 Cayley graph 可以幫助我們了解式 (4)。如果  $g_j \circ g_k^{-1} = (i, i+1)$ , 則  $G$  中  $g_j$  與  $g_k$  這兩點是透過  $(i, i+1)$  連接; 反之, 則在  $G$  中沒有生成元素將  $g_j$  與  $g_k$  這兩個點直接連接。因此可將  $M$  視為  $G$  的 adjacency matrix, 所以根據式 (4),  $n_t(a)$  的值解釋可為  $G$  中由  $e$  走  $t$  步至  $a$  的方法數, 畫出對應關係為  $a$  的鬼腳圖所需的最少橫線數也可解釋為由  $e$  走至  $a$  的最短距離, 利用 Cayley graph 讓我們不需直接計算矩陣  $M$  的次方即可求出  $n_t(a)$  的值。

例7: 以最簡單的情形  $N = 3$  為例, 圖七畫出  $G_3$  的 Cayley graph  $G = (S_3, \{(1, 2), (2, 3)\})$ , 實線代表  $(1, 2)$ , 虛線代表  $(2, 3)$ , 線所代表的移項乘線的一個端點所標示的值等於另一個端點所標示的值。以  $(1, 2)$  與  $(1, 3, 2)$  為例, 中間以虛線連接, 所以  $(1, 3, 2) = (2, 3) \circ (1, 2)$  且  $(2, 3) = (1, 3, 2) \circ (1, 2)$ 。若要計算  $n_3((1, 3, 2))$ ,



圖七.  $G_3$  的 Cayley graph.

因為由  $e$  走兩步至  $(1,2)$  有三種方法, 分別是  $e \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,3,2) \rightarrow (1,2)$ ,  $e \rightarrow (1,2) \rightarrow e \rightarrow (1,2)$  以及  $e \rightarrow (2,3) \rightarrow e \rightarrow (1,2)$ , 所以  $n_3((1,3)) = 3$ 。若要計算

$n_3((1, 3))$ , 因為由  $e$  走三步至  $(1, 3)$  有兩種方法, 分別是  $e \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (1, 3)$ , 以及  $e \rightarrow (2, 3) \rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow (1, 3)$ , 所以  $n_3((1, 3)) = 2$ 。我們也可以求得排列與所需最少橫線, 即為排列與  $e$  的對短距離, 整理結果如表一。

表一. 組成各排列所需的最少橫線數

排列	$e$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,3)$
橫線	0	1	1	2	2	3

所以3條縱線的鬼腳圖至少需要3條橫線才有可能組合成所有情況的排列。

當  $N > 3$  時, Cayley graph 的邊及點就會變的很多, 就很難直接看的出來每點與  $e$  的距離, 以及距離  $e$  最遠的點和長度。下面將介紹一種方法, 藉由計算排列的反序數, 求出排列與  $e$  的距離。反序數的定義如下

定義5: 對  $S_N$  中元素  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{pmatrix}$ , 定義

$R(f) = \{[i, j] : a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq N\}$ , 則  $f$  的反序數為  $r(f) = |R(f)|$ 。

下面的預理描述反序數與排列間的關係。

預理5:  $f \in S_N, 1 \leq i < N$ 。

(a) 若  $[i, i + 1] \in R(f)$ , 則  $r(f \circ (i, i + 1)) = r(f) - 1$ ;

(b) 若  $[i, i + 1] \notin R(f)$ , 則  $r(f \circ (i, i + 1)) = r(f) + 1$ 。

證明: 令  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & N \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & a_{i+1} & a_N \end{pmatrix}$ ,

則  $f \circ (i, i + 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & N \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i+1} & a_i & a_N \end{pmatrix}$ 。  $R(f) - \{[i, i + 1]\}$  與  $R(f \circ (i, i + 1)) - \{[i, i + 1]\}$  為一對一對應。

(a) 因為  $[i, i + 1] \in R(f)$ , 所以  $a_i > a_{i+1} \Rightarrow [i, i + 1] \notin R(f \circ (i, i + 1))$ , 因此  $r(f \circ (i, i + 1)) = r(f) - 1$ 。

(b) 因為  $[i, i + 1] \notin R(f)$ , 所以  $a_i < a_{i+1} \Rightarrow [i, i + 1] \in R(f \circ (i, i + 1))$ , 因此  $r(f \circ (i, i + 1)) = r(f) + 1$ 。

根據預理5, 我們將排列一次交換一個來排序, 就可以使反序數減少至0, 即為定理6所要證明的內容。

定理6: 令  $f \in S_N$ , 則 Cayley graph  $G = (S_N, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (N-1, N)\})$  中,  $e$  到  $f$  的距離為  $f$  的反序數。

證明:

(a) 證明存在一個路徑的長度為  $f$  的反序數:

$$\text{令 } f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & \cdots & a_N^{(0)} \end{pmatrix} = f.$$

當  $r(f_0) > 0$ , 若對於所有  $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  使得  $[i, i+1] \notin R(f)$ , 則  $a_1^{(0)} < a_2^{(0)} < \cdots < a_N^{(0)}$ , 所以  $f_0 = e$ , 此與  $r(f_0) \neq 0$  矛盾。因此可令  $i_1$  使得  $[i_1, i_1+1] \in R(f)$ , 令

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \cdots & a_N^{(1)} \end{pmatrix} = f_0 \circ (i_1, i_1+1).$$

根據預理5,  $r(f_1) = r(f_0) - 1$ 。重覆此過程直到  $r(f_{r(f)}) = 0$ , 則  $e = f_{r(f)}, f_{r(f)-1}, f_{r(f)-2}, \dots, f_0$  為  $f$  的路徑。

(b) 證明此路徑為最短:

若存在  $t < r(f)$  使得沿著長度  $t$  的路徑得到  $f = (j_t, j_t+1) \circ (j_{t-1}, j_{t-1}+1) \circ \cdots \circ (j_1, j_1+1)$ 。則根據預理5,  $0 = r(e) = r(f \circ (j_1, j_1+1) \circ (j_2, j_2+1) \circ \cdots \circ (j_t, j_t+1)) > r(f) - t > 0$  矛盾。

由 (a) 與 (b) 的結果, 得證。

由此定理我們可藉由反序數計算 Cayley graph 中任一點到  $e$  的距離。

引理7:  $G = (S_N, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (N-1, N)\})$  的直徑為  $\frac{(N-1)N}{2}$ , 且

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ N & N-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ 是唯一一點到 } e \text{ 的距離為 } \frac{(N-1)N}{2}.$$

證明:

(a) 計算  $G$  的直徑:

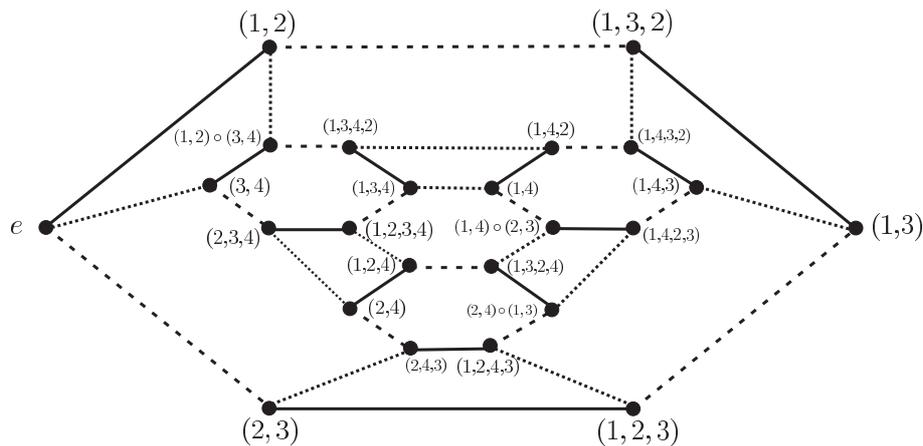
令  $a \in S_N$ , 則  $R(a) \subset \{[i, j] \mid 1 \leq i < j \leq N\}$ 。所以  $a$  的反序數  $r(a) \leq |\{[i, j] \mid 1 \leq i < j \leq N\}| = \frac{(N-1)N}{2}$ 。又  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ N & N-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  的反序數為  $|\{[i, j] \mid 1 \leq i < j \leq N\}| = \frac{(N-1)N}{2}$ , 所以  $e$  到某點的最長距離為  $\frac{(N-1)N}{2}$ , 因此  $G$  的直徑為  $\frac{(N-1)N}{2}$ 。

(b) 證明唯一性:

若  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{pmatrix} \in S_N$  的反序數為  $\frac{(N-1)N}{2}$ , 則  $\{[i, j] \mid a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq N\} = \{[i, j] \mid 1 \leq i < j \leq N\}$ , 所以  $1 \leq a_N < a_{N-1} < \cdots < a_1 \leq N$ , 因此  $a_N = 1, a_{N-1} = 2, \dots, a_1 = N$ 。

當  $N$  很大而很難畫出 Cayley graph 時, 可藉由引理 7 算出組成所有排列所需的最少橫線數。

例 8: 若要觀察 4 條縱線鬼腳圖的性質, 先畫出圖八  $G_3$  的 Cayley graph  $G = (S_3, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\})$ , 其中實線代表  $(1, 2)$ , 虛線代表  $(2, 3)$ , 點線代表  $(3, 4)$ 。圖九看起來很複雜, 可以利用反序數計算各個排列與  $e$  間的距離。以  $(1, 4, 2, 3)$  為例, 因為  $(1, 4, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 所以  $R((1, 4, 2, 3)) = \{[1, 4], [2, 4], [3, 4], [1, 3], [2, 3]\}$ , 可求得  $(1, 4, 2, 3)$  的反序數為 5, 即為  $(1, 4, 2, 3)$  所需的最少橫線數。同樣利用反序數也可以求出其他排列與所需最少橫線的關係, 結果如表二所示。又根據引理 7,  $(1, 4) \circ (2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  與  $e$  間距離 6 為最長, 所以 4 條縱線的鬼腳圖至少需要 6 條橫線才有可能組成所有情況的排列。



圖八.  $G_4$  的 Cayley graph。

表二. 組成各排列所需的最少橫線數

排列	橫線	排列	橫線	排列	橫線	排列	橫線
$e$	0	$(2,3,4)$	2	$(1,2,4,3)$	3	$(1,4,3)$	4
$(1, 2)$	1	$(2,4,3)$	2	$(1,3,4,2)$	3	$(1, 3) \circ (2, 4)$	4
$(2, 3)$	1	$(1, 2) \circ (3, 4)$	2	$(1,4,3,2)$	3	$(1,4)$	5
$(3, 4)$	1	$(1,3)$	3	$(1,2,4)$	4	$(1,3,2,4)$	5
$(1, 2, 3)$	2	$(2,4)$	3	$(1,3,4)$	4	$(1,4,2,3)$	5
$(1, 3, 2)$	2	$(1,2,3,4)$	3	$(1,4,2)$	4	$(1, 4) \circ (2, 3)$	6

Cayley graph 可以幫助我們藉由圖型了解排列群及鬼腳圖的性質。觀察圖七，很容易發現由  $e$  走到  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  及  $(2, 3)$  的任意路徑長度皆為奇數，所以只能用奇數條橫線畫出所對應的鬼腳圖；由  $e$  走到  $e$ ,  $(1, 3, 2)$  及  $(1, 2, 3)$  的任意路徑長度皆為偶數，所以只能用偶數條橫線畫出。同時在圖八及其他任意的  $N$  也可觀察到同樣的現象。這驗證了奇排列不可能用偶數個移項合成，同樣的偶排列無法用奇數個移項合成。

## 六. 固定橫線數，組成特定對應關係鬼腳圖的機率

考慮一個很多條縱線的鬼腳圖，若是橫線數很少，勢必很難從最右邊的起點走到最左邊的終點；當橫線數越多，則越容易由最右邊的起點走到最左邊的終點。所以由不同的起點走向不同的終點的機率不盡然相同，而且與橫線數及縱線的多寡有關。若是要詳細計算鬼腳圖由某個起點走向某個終點的機率，可以利用類似第五節的方法加入機率來進行計算。

$N$  條縱線的鬼腳圖，畫上任意  $t$  條橫線，令  $A(a)$  為最靠近終點橫線的對應關係為  $a \in G_N$  的事件， $B(a)$  為其他橫線組成的對應關係為  $a$  的事件， $X(a)$  為所有橫線組成對應關係為  $a$  的事件， $p_t(a) = P(X(a))$  為出現對應關係  $a$  鬼腳圖的機率函數。假設對於所有的  $j, k \in G_N$ ,  $A(j)$  與  $B(k)$  互為獨立事件。因為  $G_N$  的元素個數為  $N!$ ，令  $g_1, g_2, \dots, g_{N!}$  為  $G_N$  的所有元素。由於  $A(g_1), A(g_2), \dots, A(g_{N!})$  互為互斥事件，所以對於任意的  $a \in G_N$ ,  $X(a) \cap A(g_1), X(a) \cap A(g_2), \dots, X(a) \cap A(g_{N!})$ ，也是互為互斥事件。又因為樣本空間  $S = \bigcup_{g \in G_N} A(g)$ ，可推得

$$X(a) = X(a) \cap S = \bigcup_{g \in G_N} X(a) \cap A(g), \quad (5)$$

所以

$$p_t(a) = P\left(\bigcup_{g \in G_N} X(a) \cap A(g)\right) = \sum_{g \in G_N} P(X(a) \cap A(g)). \quad (6)$$

又因  $X(a) = \bigcup_{h \in G_N} B(h^{-1} \circ a) \cap A(h)$ ，可得

$$p_t(a) = \sum_{g \in G_N} P\left(\bigcup_{h \in G_N} B(h^{-1} \circ a) \cap A(h) \cap A(g)\right) \quad (7)$$

因為當  $h \neq g$  時， $A(h) \cap A(g) = \phi$ ，可化簡為

$$\begin{aligned} p_t(a) &= \sum_{g \in G_N} P(B(g^{-1} \circ a) \cap A(g)) \\ &= \sum_{g \in G_N} P(B(g^{-1} \circ a)) \times P_1(A(g)) \end{aligned} \quad (8)$$

由於  $P(B(g^{-1} \circ a)) = p_{t-1}(g^{-1} \circ a)$ , 且  $P(A(g)) = p_1(g)$ , 代入 (8) 式, 最後也可得到類似式 (2) 的遞迴關係式:

$$p_t(a) = \sum_{g \in G_N} p_{t-1}(g^{-1} \circ a) \times p_1(g), \quad (9)$$

當  $t = 1$  時,  $p_1(a) = \begin{cases} \text{畫橫線 } (k, k+1) \text{ 的機率, 若存在整數 } k < N \text{ 使得 } a = (k, k+1), \\ 0, \text{ 若 } a \text{ 為其他排列.} \end{cases}$

且需滿足  $\sum_{g \in G_N} p_1(g) = 1$  的條件。如同前一節, 令  $g_1 = e$ ,  $m_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$ , 式 (9) 也可以寫成一個矩陣關係式,

$$m_t = M^t m_0, \quad (10)$$

$$\text{其中 } M = \begin{pmatrix} p_1(g_1 \circ g_1^{-1}) & p_1(g_1 \circ g_2^{-1}) & \cdots & p_1(g_1 \circ g_{N!}^{-1}) \\ p_1(g_2 \circ g_1^{-1}) & p_1(g_2 \circ g_2^{-1}) & \cdots & p_1(g_2 \circ g_{N!}^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1(g_{N!} \circ g_1^{-1}) & p_1(g_{N!} \circ g_2^{-1}) & \cdots & p_1(g_{N!} \circ g_{N!}^{-1}) \end{pmatrix},$$

且  $m_t = (p_t(g_1), p_t(g_2), \dots, p_t(g_{N!}))^T$ 。

同樣考慮  $G_N$  的 Cayley graph  $G = (S_N, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (N-1, N)\})$ , 可知  $M$  為  $G$  的 weighted adjacency matrix, 每個邊所代表的數值就是在鬼腳圖上畫該條橫線的機率, 所以  $p_t(a)$  的值可解釋為圖  $G$  中由  $e$  走  $t$  步至  $a$  的機率。

若是要計算從特定起點  $a$  連接到特定終點  $b$  鬼腳圖的機率, 先找到符合  $k_l(a) = b$  的所有排列  $k_1, k_2, \dots, k_L$ 。因為由  $a$  連接至  $b$  的事件是  $\bigcup_{l=1}^L X(k_l)$ , 所以由  $a$  連接至  $b$  的機率為

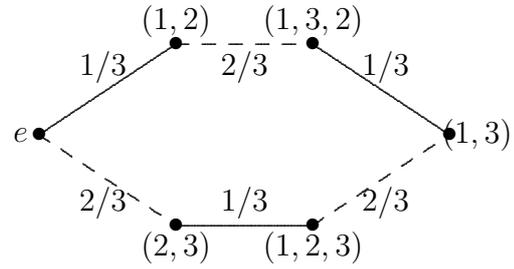
$$q_t(a, b) = P\left(\bigcup_{l=1}^L X(k_l)\right). \quad (11)$$

又因若  $e \neq f$ , 則  $X(e)$  與  $X(f)$  為互斥事件, 所以

$$q_t(a, b) = \sum_{l=1}^L P(X(k_l)) = \sum_{l=1}^L p_t(k_l). \quad (12)$$

由前面的方法, 可以求出每個  $p_t(k)$  的值, 因此就可算出由  $a$  連接至  $b$  的機率:  $q_t(a, b)$  的值了。

例9: 假設某人比較喜歡畫 (2,3) 的橫線於 3 條縱線鬼腳圖中, 畫的機率為  $\frac{2}{3}$ , 可畫出  $G_3$  的 Weighted Cayley Graph 如圖九。若要計算  $q_3(2, 1)$ , 首先找出所有滿足  $\phi(2) = 1$  的排列, 為 (1,2), (1,3,2)。由  $e$  走三步到 (1,2) 的走法有  $e \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (1, 2)$ ,  $e \rightarrow (1, 2) \rightarrow e \rightarrow (1, 2)$  及  $e \rightarrow (2, 3) \rightarrow e \rightarrow (1, 2)$  這三種, 機率分別為  $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ ,  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$  及  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ , 因此出現排列 (1,2) 的機率為  $\frac{4}{27} + \frac{1}{27} + \frac{4}{27} = \frac{1}{3}$ 。因為 (1,3,2) 是偶排列, 所以不可能以三步由  $e$  走至 (1,3,2)。因此可得出  $q_3(2, 1) = p_3((1, 2)) + p_3((1, 3, 2)) = \frac{1}{3}$ 。利用同樣的方法, 可得  $q_3(2, 2) = p_3(e) + p_3((1, 3)) = \frac{2}{9}$  及  $q_3(2, 3) = p_3((2, 3)) + p_3((1, 2, 3)) = \frac{4}{9}$ 。三條縱線的鬼腳圖的結果整理為表三, 發現在橫線數較少的情況之下, 由第2個起點走到各個終點的機率不盡然相同, 所以遊戲不是完全公正的; 而橫線越多, 走到各個終點的機率越接近, 遊戲也就越公正。



圖九.  $G_3$  的 Weighted Cayley Graph。

表三. 由中央的起點走至各個終點的機率

橫線	2 → 1	2 → 2	2 → 3	橫線	2 → 1	2 → 2	2 → 3
1	0.333	0	0.667	5	0.333	0.296	0.370
2	0.222	0.556	0.222	7	0.333	0.321	0.346
3	0.333	0.222	0.444	10	0.332	0.336	0.332
4	0.296	0.407	0.296	15	0.333	0.333	0.333

例10: 若要討論 7 條縱線的鬼腳圖, Cayley Graph 會變的很複雜, 可以利用式 (10) 的矩陣進行運算。假設畫各個橫線的機率接相同, 經過計算得到表四的結果<sup>1</sup>。

觀察可發現, 橫線數越少時, 越難由中央的起點走至越遠的終點, 一直要到橫線數非常多, 走到各個終點的機率才會接近。一般鬼腳圖的橫線不會很多, 所以由不同起點走到不同終點的機率不相等。如果想要走到特定的終點, 可以選擇與該終點附近的橫線為起點, 走到你想要的終點的機會就會比較大。

<sup>1</sup>由於計算過程過於冗長, 在此只列出結果, 有興趣的讀者可自行利用 Mathematica 或 Maple 等 computer algebra systems 進行計算。

表四. 由中央的起點走至各個終點的機率

橫線	$4 \rightarrow 1$	$4 \rightarrow 2$	$4 \rightarrow 3$	$4 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 5$	$4 \rightarrow 6$	$4 \rightarrow 7$
1	0	0	0.167	0.667	0.167	0	0
2	0	0.028	0.222	0.5	0.222	0.028	0
3	0.005	0.056	0.236	0.407	0.236	0.056	0.236
4	0.013	0.077	0.235	0.350	0.235	0.177	0.013
5	0.024	0.093	0.228	0.312	0.228	0.093	0.024
10	0.076	0.125	0.189	0.219	0.189	0.125	0.076
15	0.108	0.134	0.167	0.181	0.167	0.134	0.108
20	0.125	0.139	0.155	0.162	0.155	0.139	0.125
30	0.138	0.142	0.146	0.148	0.146	0.142	0.138
40	0.142	0.143	0.144	0.144	0.144	0.143	0.142
50	0.143	0.143	0.143	0.143	0.143	0.143	0.143

## 七. 總結

本文利用排列群原理分析鬼脚圖的各種可能組合情形, 並利用 Cayley Graph 分析特定橫線數組成特定對應關係鬼脚圖的方法數。最後由機率的方法, 發現鬼脚圖在橫線數少的情況下, 不是一個公平的抽籤方法。若要使抽籤達到公平, 可將遊戲規則稍作改變, 例如將終點處的抽籤項目遮住, 可使遊戲達到公平, 而且不失鬼脚圖的趣味性。

## 八. 誌謝

感謝交通大學應用數學系翁志文老師在計算排列間路徑長度的問題給予想法, 應用數學系楊一帆老師對於文章內容上面給予建議, 以及父親歐國斌先生在文章撰寫上給予的意見, 以及審查者提供了利用 Cayley Graph 詮釋式 (4) 的建議。

## 參考資料

1. John B. Fraleigh (2003). A First Course in Abstract Algebra (7th ed.). Addison-Wesley.
2. I. N. Herstein and David J. Writer (1988). A primer on Linear Algebra. Macmillan Publishing Co.
3. Saeed Ghahramani (2000). Fundamentals of Probability (2nd ed.). Prentice Hall.

—本文作者就讀於交通大學電子物理學系—