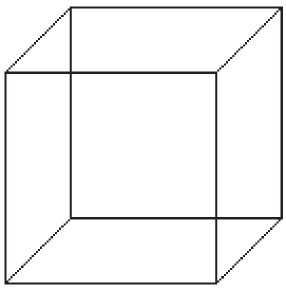
所謂幾何者幾何

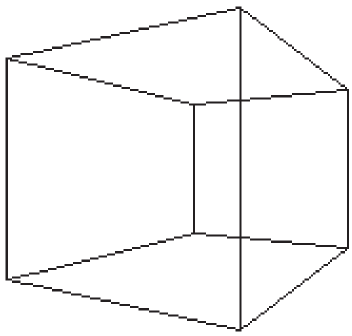
平　斯

謹以此文紀念陳省身先生

早些年普遍的工科學生都佩有兩把尺, 一把是繪圖用的丁字尺, 比較長, 用背的, 另一把計算尺較短, 則繫在腰際, 在校園裡騎車飛奔時, 倚天屠龍庶幾近之。轉眼之間, 當年仗尺諸人, 如今在科技公司大量製造電腦, 致令雙尺沉埋, 廢成骨董, 被陳列在科學博物館裡, 如今再也沒有人會辦新生盃計算尺賽。然而工具雖改進了, 武功卻歷久彌新, 跟著繪圖室裡連夜趕工時流傳的靈異故事一起保存下來。甚至數學所曾經辦了一個研習班, 由李華倫主講, 他並寫了動畫原理[1]詳述計算 (computation) 幾何。



平行射影法

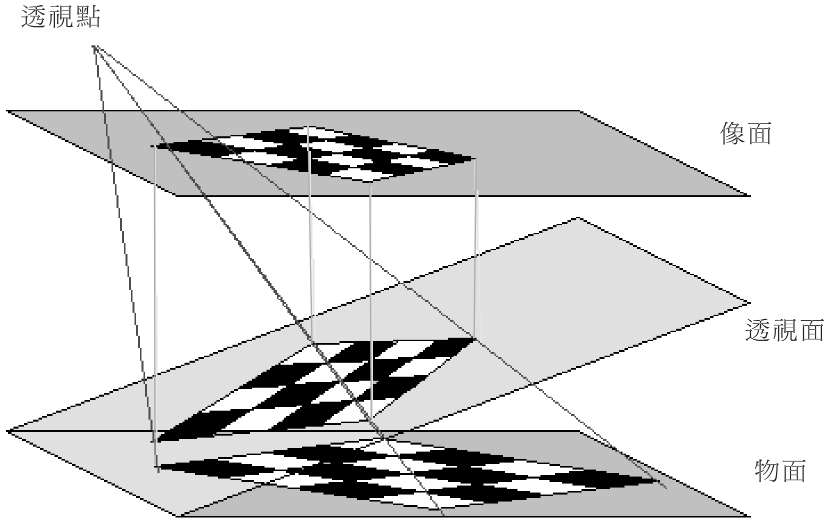


透視射影法

工程繪圖時, 把實物描繪在平面上, 有兩種射影法: 平行法與透視法。平行法用在機械繪圖, 假設是作斜角平行投影, 則成像具有立體感。眞正使用時, 機械元件的設計藍圖須對 X, Y, Z 三個軸分別做正投影, 有經驗的工程師可以從這三個投影圖裡, 毫釐不失的重建立體物件。但是數學要問的是: 這樣的逆推是否唯一? 譬如從國, 英, 數等科目成績的個別分布, 可以推論全部考生學力測驗成績的整體分布嗎? 更廣泛的問題: 假設一個隨機向量, 只知道每組子向量的邊際分布時, 我們能還原實際的分布嗎? 正如在醫學影像術裡, 如何從各方向的斷層掃瞄數據, 還原出清晰的立體影像? 這些各式各樣應用, 明顯的是長在同一條藤上的。全部都根源自畫法 (descriptive) 幾何, 這套數學理論由蒙日 (Gaspard Monge 1746-1818) 發展出來。他是拿

破倫麾下的海軍部長, 創辦了綜合工藝學院, 專門爲帝國大業培養精英人才, 他還親自授課, 這門幾何的著作當時被認作國家軍事機密, 等了三十年後才被解禁出版。

其次是透視法, 用在建築繪圖, 最基本的是中心透視, 早在文藝復興時期就已經有很成熟的技巧, 一般畫工沒有數學式子, 只用一把尺就行了。但是更臻完整的數學理論要等到其後的彭賽列 (Jean-Victor Poncelet 1788-1867) 他出身自綜合工藝學院, 追隨拿破倫遠征莫斯科, 不幸在伏爾加河畔兵敗被俘, 雖然身陷集中營, 卻毫不氣餒, 他召集難友討論學術, 苦思當時所學, 因此創立了射影 (projective) 幾何。這種幾何被歸類爲綜合 (synthetic) 幾何。相對於笛卡兒 (René Descartes 1596-1650) 利用坐標法將圖形換成代數式子的解析 (analytic) 幾何。

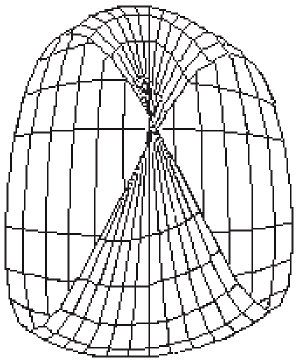


透視原理

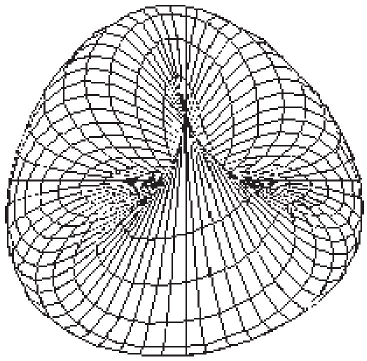
早年, 王九逵曾在台大森林館給過一場演講, 現在仍然有深刻印象的是當時熱烈的場景, 只記得內容是非歐幾何, 細節不復記憶了。近來他爲中央大學的教育學程又給一系列的演講, 而且這次寫成射影幾何六講 [2], 本文將沿用同樣的符號。射影面有幾種不同的看法, 第一個是三維空間裡的所有一維子空間所構成的集合, $P^2 = \{[\xi_0, \xi_1, \xi_2] | 0 \neq (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in R^3\}$ 第二個是二維球面以對蹠等同 (antipodal) 關係來化約的商空間。因爲兼具了線性與緊緻這兩者數學最重要的性質, 因此左右逢源, 無往不利。射影面上所有的射影變換構成射影群 $pGL(3)$ 原是個商群 [3], 但是爲了討論方便, 不妨逕行看成線性群 $GL(3)$ 這個群可作各式各樣的分解而可得下列子群:

第一個是正交群 $O(3)$ 包含了所有球面上的旋轉和鏡射, 周遍 (transitive) 作用在射影面上。第二個是羅倫茲 (Lorentz) 群$O(1, 2)$, 這個群把射影面分解成三部分: 圓盤 $D^2 = \{\xi_0^2 > \xi_1^2 + \xi_2^2\}$ 圓錐曲線 $S^1 = \{\xi_0^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2\}$ 與烏比士 (Moebius) 帶 $M^2 = \{\xi_0^2 < \xi_1^2 + \xi_2^2\}$。其

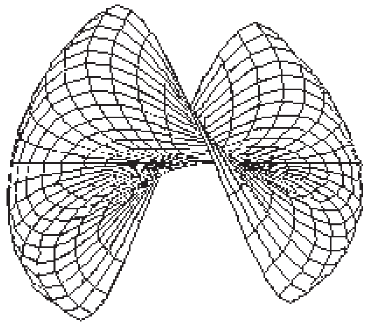
中圓盤與烏比士帶沿著圓錐曲線黏貼起來, 可得羅曼曲面 [4]。射影面應該嵌在四維空間裡, 這是射影面投影在三維空間的一種表現。羅倫茲群亦周遍作用於圓盤上。第三個是歐氏群 $E(2)$, 包含了所有平面上的旋轉鏡射和平移。它把射影面分解成射影線 $P^1 = \{\xi_0 = 0\}$ 與仿射面 $R^2 = \{\xi_0 \neq 0\}$ 兩部分, 歐氏群亦周遍作用在仿射面上。



烏比士帶

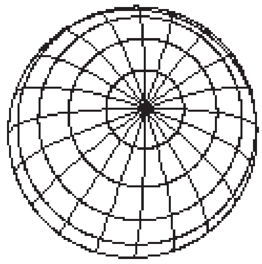
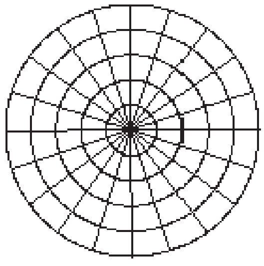
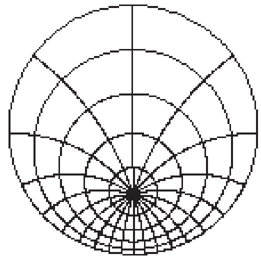


羅曼曲面



圓盤

上述三個集合 P^2, R^2, D^2 由三個群 $O(3)$, $E(2)$, $O(1,2)$ 各別遍歷作用的, 都包含一個 $O(2)$ 的迷向 (isotropic) 子群, 表示可以引進度量, 這些群就是個別的等度變換群。這是高度的對稱, 遍歷作用表示到處的彎曲是一致的, 故爲三個常曲率空間。其曲率分別爲: $K = 1, 0, -1$ 依序是橢形 (elliptic) 幾何, 歐氏 (Euclidean) 幾何, 盈形 (hyperbolic) 幾何的模型, 這三種幾何都符合歐幾理得的幾何原本內, 除了“平行公設” 之外的所有公設, 統稱絕對 (absolute) 幾何, 而橢形與盈形幾何之有異於歐氏幾何, 在“平行公設”不成立, 故合稱非歐 (noneuclidean) 幾何。

各種幾何的極坐標		
 球面	 平面	 雙曲面
橢形幾何 $ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$	歐氏幾何 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$	盈形幾何 $ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2$

古典希臘時的畢達格拉斯學派, 認爲萬物皆源於數, 因此造物主是個數學家。後來柏拉圖學派以爲, 萬物皆由氣、火、水、土、以太等五個元素構成, 而且反應在五個正多面體上, 因此造物主其實是個幾何學家。到了十八世紀的啓蒙時代, 哲學家們探究認識的起源, 康德 (Immanuel Kant (1724-1804)) 認爲人對客觀事實的感覺過渡到理性的認識, 是透過先驗的良知良能: 時間與空間的直觀感覺, 兩者都是天賦生成的, 而這個被體認的空間, 當然是歐氏空間, 因此爲了人類的福祉, 造物主不僅存在其實還是個歐氏幾何學家 [5]。

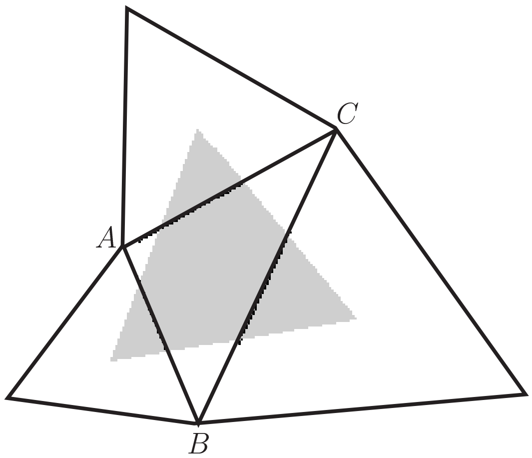
康德何許人也, 他是德意志全境的精神導師, 他說的還能錯嗎? 即使貴如數學王子的高斯, 尚且不敢攖其鋒, 只能把非歐幾何的研究結果藏在抽屜裡, 秘而不宣。不久之後還是在德意志境外的俄羅斯與匈牙利, 分別被提了出來, 大家頓時覺悟原來歐氏幾何只是當初設定的選項之一, 因此質疑: 這個在康德哲學的框架下思考, 被體認的空間究竟是三個裡的那一個? 或者三者全非還有其他? 這個問題當然是個沒有解答的公案。只是打開了思想的一道大門, 首先有哲學家認爲, 這證明了先驗的說法是錯誤的, 因而據此以顚覆康德哲學。其次物理世界的空間, 從邏輯實證的觀點, 固然在太陽系尺度內, 大致吻合相對論, 但是宇宙論裡所有各式各樣的 $1+3$ 時空模型, 目前還是宗教信仰的含量高些。最後非歐幾何證明了“平行公設”的獨立性, 但是其他的各公設是否也應逐條經過檢視呢? 何以歐幾理得能一言爲萬世法, 那究竟甚麼才是幾何? 一時之間大家各執其端, 互謗異己, 這終要等待個一代宗師出現, 這段過程很像禪宗六祖惠能復出的經過 [6]。

> 時有風吹旛動, 一僧曰風動, 一僧曰旛動, 議論不已 ,
> 惠能進曰:「不是風動, 不是旛動, 仁者心動」, 一眾駭然.

惠能用的其實就是黑格爾的辯證法, 在爭論中不靠兩邊而攀頂, 佔據相對的高度來調和對立, 統一矛盾。克萊因 (Felix Klein (1849-1925)) 如法炮製, 提出厄南庚綱領 (Erlanger Programm), 認爲數學不應爲哲學服務, 所謂幾何, 開宗明義, 非風非旛, 就只是在特定的變換群的操作下, 研究其不變量的學問, 因此幾何的分類與從屬, 等同於變換群。兼者他與舊日同窗李碩佛 (Sophus Lie (1842-1899)), 倆人在離散群與連續群之間, 瓜分了變換群論, 各執牛耳, 分別闡明其中妙用。從此道理既明, 世人才得脫離爭論, 各守其分。終究黑格爾辯證還有一條法則, 就是歷史演變, 克萊因自己也無法逃避。全域作用的變換群太過於拘束, 因此被解放成局部座標轉換的結構群。然而群的種類千奇百怪, 相對應的幾何更是形色繽紛。多數幾何人工鑿斧, 瘢痕累累, 是凡人的拙品。小林昭七在變換群經典 [7]的序言裡說, 只有黎曼 (riemannian) 幾何與複 (complex) 幾何, 自然天成, 是造物主的傑作, 前者被納許 (John Nash) 證明是歐氏幾何的延伸, 而後者, 周韙良 (1911-1995) 指出是解析幾何的餘緒。這兩種幾何交會之處 , 陳省身 (1911-2004) 開闢出酉 (Unitary) 幾何, 是衆門人弟子競技之場。

畢竟康德哲學仍然廣受各界重視, 尤其是在教育理論, 先驗的時間與空間直觀感覺仍然是認知學習的基礎。教育的基本任務, 在加強或導正學習者這類直觀感覺, 爲達成這件任務, 首要喚醒學習主體的自主性, 落實的手段上就是著重動手做實驗。長久以來, 歐氏幾何的推論方式, 是人類文明唯一完整而不具價值偏見的辯證體系, 最適合用來教育學童。學習的目標不僅是空間概念, 解題技巧。而最重要在養成符合邏輯的習慣, 在思考與行爲上造成烙印, 以便將來成長後能遵循實證, 破除迷信, 甚且在認同社會契約的基礎上, 提高法治素養, 俾能實踐民主, 古人云, 文以載道, 斯之謂也。

歐氏幾何的學習實驗就是“尺規作圖”。當然正如本文開始提到的雙尺, 直尺與圓規做爲工具的時代, 逐漸離我們遠去, 取代的是資訊工具, 因此近年來有動態 (dynamic) 幾何應運而生, 這由全任重在各式各樣場合倡導的 [8], 不是傳統義意下的一門幾何, 而是個數學教育方法論。在軟體的輔助下, 尺規作圖已經換了全新的面貌, 尤其是充分應用空間與時間連續的特性, 幾何的證明透過巧妙的圖像動態表現, 直接與直觀意念互動。一則有關任意三角形的全稱命題 (例如拿破崙定理) 可作圖檢驗, 達到滿足“任意”這兩字的所有字面含義。而且歐氏幾何與非歐幾何之間的差異, 只在一個按鍵的切換。以前憑空的想像, 現在可以立即呈現圖像, 而圖像又再激發想像, 這是思考的鍊鎖反應。



拿破崙定理: 任意三角形各邊延伸作正三角形, 其中心構成正三角形。

但是目前軟體設計的基礎是數值計算, 因此根本上還是解析幾何, 只是隱藏在幕後罷了, 幸好解析幾何與綜合幾何這兩者, 不如我們想像的對立, 其實是相通的。馮許陶德 (von Staudt (1798-1867)) 證明由射影幾何的公設也可以重新建立數系, 還可以作圖畫出四則運算 [2]。希爾伯特 (David Hilbert 1862-1943) 把幾何公設裡的點, 線等不定義名詞, 可視爲任何物件, 這正是圖寧機的概念。因此由圖像爲主, 從綜合幾何出發來設計的電腦, 理論上是可行的, 以中

文的辨識過程來看, 這件設計的責任落在慣用漢字的華人身上, 也是邏輯的必然, 其在斯乎, 其在斯乎, 小子焉敢讓也。

參考文獻

1. 李華倫, 談3D 動畫原理, 數學傳播, 第27卷第三期。
2. 王九逵, 射影幾何六講, 數學傳播, 自25卷第一期至第26卷第二期。
3. Artin, E., Geometric Algebra, Interscience, 1957.
4. 平斯, 投影面, 數學傳播, 第14卷第一期, 26-27頁。
5. Blumenthal, M., *A modern view of geometry*, Dover 1961第13頁。
6. 六祖壇經。
7. Kobayashi, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, 1972.
8. 全任重, 圓規直尺與 Cabri-geometre, 數學傳播, 第20卷第一期, 3-14頁。
9. 本文繪圖程式可由 ftp.scu.edu.tw/scu/math/pub/erlanger.zip 取用。

—本文作者任教於東吳大學數學系—