再談「組合計數的方法」

張鎮華

一. 前言

李政豐 [1] 和陳世傑 [2] 在數學傳播談論這樣的題目:「白球2個, 黑球2個, 黃球2個, 紅球2個全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?」李文採用排容原理, 從兩種球, 各自有一不一定是2的球數去算機率; 再擴張到三種、四種、五種球, 並猜測出一般的公式, 眞可謂匠心獨具。陳文則堅持在有 m 種球 但每種還是2球, 並從 m 是2開始, 算到3和4, 並從而猜測一般 m 的答案是 $\frac{1}{m}$, 整體淸楚明白, 學生很容易懂。在這個小文裡, 我們要來說明他們的一般公式都是對的。

二. $\boldsymbol{m}$ 種顏色的球每種 $\boldsymbol{k}$ 球

我們先來談李文原來的題目, 用到的方法對於一般有 m 種球每種 k 球的證明和 $m=4$ 及 $k=2$ 的原來題目並沒有什麼不同, 所以乾脆就證明這一般的結果。

我們用的方法是一對一對應法, 一般來說要說明兩個集合元素個數一樣多, 最直接的方法是在這兩個集合的元素間建立出一對一的對應, 這方法很直觀, 卻能解決許多問題。最著名的例子是 Caley 定理的證明, 這個定理是說:「n 個點的完全圖共有 n^{n-2} 個生成樹」, 最早的證明是比較複雜的, 後來, 有人將這些生成樹和「長度 $n-2$ 佈於 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的有序字列」做出一對一的對應, 因此這兩類物件的個數一樣多, 而後者很容易知道是 n^{n-2}, 所以前者的數目就是 n^{n-2}。

現在讓我們回到原來的問題, 首先, 令 S 表示每次從袋中取一球, 但不放回, 並且將這 km 球全部取完的樣本空間, 而 S_i 是 S 中第 i 種球最先取完的事件 $(1\le i\le m)$。我們並不需要眞正去算 S 的元素個數, 雖然我們知道它是 $(km)!/(k!)^m$。我們眞正需要說明的只是

$$|S_1|=|S_2|=\cdots=|S_m|.$$

如果這是對的, 則對於任一個 i, 第 i 種球最先被取完的機率就是 $\frac{1}{m}$。

要看出 $i \neq j$ 時 $|S_i| = |S_j|$ 並不難, 我們考慮下面的對應: 對於 S_i 中的任一取球法 $(a_1, a_2, \ldots, a_{km})$ 對應到 $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{km})$, 其中

$$a'_t = \begin{cases} j, & \text{當 } a_t = i; \\ i, & \text{當 } a_t = j; \\ a_t, & \text{當 } a_t \neq i \text{ 且 } a_t \neq j. \end{cases}$$

則 $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{km})$ 是 S_j 的一種取球法, 而且這樣的對應是 S_i 和 S_j 之間的一對一對應。

三. 一般化的結果

現在來談論李文中的一般化結果, 問題是: 當有 m 種色球, 顏色是 c_i 的色球有 n_i 個 $(1 \leq i \leq n)$, 全部放在一個袋子中, 從中每次隨機取出一球不放回, 顏色 c_m 的球先取完的機率是多少? 李文的答案是

$$P = -(m-2) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{n_i}{n_i + n_m} + n_m \sum_{i=2}^{m-1} (-1)^i \left(\sum_{A \in \binom{M}{i}} \frac{1}{t(A) + n_m} \right),$$

其中 $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}\}$ 視爲元素可重複的集合, $\binom{M}{i}$ 代表從集合 M 中取出 i 個元素出來的部分集合, $t(A)$ 表示 A 中元素的和。

首先, 如果將 $\frac{n_i}{n_i+n_m}$ 寫成 $1 - \frac{n_i}{t(\{n_i\})+n_m}$, 並湊出 $1 = \frac{n_m}{t(\phi)+n_m}$ (其中 ϕ 表示空集合, 而 $t(\phi) = 0$), 則可以將公式改寫成

$$P = \sum_{A \subseteq M} \frac{(-1)^{|A|} n_m}{t(A) + n_m}.$$

其實我們也可以考慮第 j 種顏色的球, 先取完的機率 P_j。若 $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$, 則可以知道

$$P_j = \sum_{n_j \in A \subseteq N} \frac{(-1)^{|A|-1} n_j}{t(A)}.$$

現在我們來解釋上面這個式子。令 S 表示所有可能取球的樣本空間, 當 $i \neq j$ 時 S_i 表示第 i 種球比第 j 種球先取完的事件, 所以 $S - \bigcup\limits_{i \neq j} S_i$ 表示第 j 種球先取完的事件, 由排容原理

$$\left| S - \bigcup_{i \neq j} S_i \right| = \sum_{I \subseteq \Lambda} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} S_i \right|,$$

其中 $\Lambda = \{1, 2, \ldots, m\} - \{j\}$。$\bigcap\limits_{i \in I} S_i$ 表示對於任一 $i \in I$, 第 i 種球都要比第 j 種球先取完, 這樣的機率是 $\frac{n_j}{\sum_{i \in I} n_i + n_j}$ 或者 $\frac{n_j}{t(A)}$, 其中 $A = \{n_j\} \cup \{n_i : i \in I\}$。要看出上面的機率, 首先

不在 $I \cup \{j\}$ 的球可以不考慮, 因爲不影響機率 (請想想看), 所以可以想成我們只有 $\sum\limits_{i\in I} n_i t n_j$ 個球, 在這些球中, 我們逐一取球, 但希望第 j 種球最後取完, 這相當於最後一個球取的是第 j 色的球, 而這樣的機率自然是 $n_j/\sum_{i\in I}(n_i+n_j)$ (請想想看)。所以

$$\begin{aligned}P_j &= \frac{1}{|S|}\left|S-\bigcup_{i\neq j} S_i\right| = \sum_{I\subseteq\Lambda}\frac{1}{|S|}(-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I} S_i\right| \\ &= \sum_{I\subseteq\Lambda}\frac{(-1)^{|I|}n_j}{\sum\limits_{i\in I} n_i + n_j} = \sum_{n_j\in A\subseteq N}\frac{(-1)^{|A|-1}n_j}{t(A)}.\end{aligned}$$

四. 討論

最後, 我們來看看, 爲什麼一般的公式可以包含所有 $n_i=2$ $(1\le i\le m)$ 的特殊公式。首先, 對於滿足 $1\le k\le m$ 的 k, 恰有 $\binom{m-1}{k-1}$ 個集合 A 滿足 $n_j\in A\subseteq N$, 所以由 $t(A)=2k$ 可以得到

$$P_j=\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}2}{2k}.$$

由於 $\binom{m-1}{k-1}\frac{1}{k}=\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}\frac{1}{k}=\frac{1}{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{1}{m}\binom{m}{k}$, 我們可以得到

$$\begin{aligned}P_j &= \frac{-1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k = \frac{-1}{m}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k-1\right) \\ &= \frac{-1}{m}\left((-1+1)^m-1\right)=\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

上述計算用到二項式定理

$$(x+1)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k.$$

五. 感謝

謝謝一位不知名審查人的寶貴建議, 得以將本文大加改進。

參考文獻

1. 李政豐, 組合計數的方法兩則, 數學傳播第28卷第2期 (民國93年6月), 第43-58頁。
2. 陳世傑, 一個題目多種解法 — 談排列組合的數學, 數學傳播第29卷第1期 (民國94年3月), 第30-31頁。

—本文作者任教於台灣大學數學系—