勒貝格 (Lebesgue) 定理的有趣證明與函數 $\boldsymbol{R}$ 可積性

胡紹宗

摘要: 本文從振幅函數談起, 藉助 L 積分理論, 巧妙的證明了勒貝格定理, 然後通過幾個典型例子充分說明了該定理是判定函數 R 可積性的得力工具。

關鍵詞: R 可積, 零測度集, 振幅函數。

勒貝格定理是研究 R 積分 [見附註一]與 L 積分 [見附註二]的重要工具, 這個定理是法國數學家, 也同時是實變函數論之奠基者勒貝格的重要貢獻。

勒貝格定理: 設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可積的充要條件是: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不連續點集爲零測度集。

在證明之前介紹一下有關知識及引理:

如果 $f(x)$ 在實數系統 R 的點集 A 上有定義且有界, 則 $w(A,f)=\sup_{x\in A} f(x)-\inf_{x\in A} f(x)$ 稱爲 $f(x)$ 在 A 上的振幅。

設 $f(x)$ 在 $E\subset R$ 上有定義, 對任一點 $x_0\in E$, 則 $w(x_0)=\lim_{\delta\to 0} w((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap E,f)$ 稱爲 $f(x)$ 在點 x_0 的振幅。

$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap E$ 上的上、下確界分別記爲 $M_\delta(x_0)$ 與 $m_\delta(x_0)$, 當 $\delta\to 0$ 時, 二者的極限分別記爲 $M(x_0)$ 與 $m(x_0)$, 顯然有

$$m_\delta(x_0)\le m(x_0)\le f(x_0)\le M(x_0)\le M_\delta(x_0)$$

及
$$w(x_0)=M(x_0)-m(x_0)$$

定義1: 函數 $m(x)$ 與 $M(x)$ 分別稱爲 $f(x)$ 的貝爾 (Baire) 下函數與貝爾上函數。$w(x)=M(x)-m(x)$ 稱爲 $f(x)$ 的振幅函數。

定義2: $f(x)$ 定義在 $E \subset R$ 上, $x_0 \in E$, 如果 $f(x)$ 在 x_0 點的相對於 E 的振幅 $w(x_0) = 0$, 則稱 $f(x)$ 依貝爾意義在 x_0 點相對於 E 是連續的。

註: 設 $E \subset R$, $x_0 \in E$, $f(x)$ 定義在 E 上, 一般對 $f(x)$ 在 x_0 連續有下述兩種定義:

一. 對任意 $\varepsilon > 0$ 均有 $\delta > 0$ 和 ε 對應, 使當 $|x - x_0| < \delta$ 時恆有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。

二. 設 $\{x_n\}$ 爲 E 中的數列。若 $\lim x_n = x_0$ 則必有 $\lim f(x_n) = f(x_0)$。

這兩個定義都和 Baire 意義的連續是同値的。

引理1: 設 $f(x)$ 爲任意函數。

作區間 $[a, b]$ 的一個分割序列:

$$\begin{array}{lcl} D_1 & : & a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_{n_1}^{(1)} = b \\ D_2 & : & a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \cdots < x_{n_2}^{(2)} = b \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ D_i & : & a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_{n_i}^{(i)} = b \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

使 D_{i+1} 的分點包含 D_i 的分點, 並使

$$\lambda_i = \max_k [x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}] \to 0 \quad (i \to \infty)$$

作簡單函數列:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} m_k^{(i)}, & x_k^{(i)} < x < x_{k+1}^{(i)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1) \\ 0, & x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)} \end{cases}$$

其中 $m_k^{(i)}$ 表示 $f(x)$ 在 $[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}]$ 上的下確界。則當 $[a, b] \ni y \neq x_k^{(i)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n_i)$ 時, 有 $\lim_{i \to \infty} \varphi_i(y) = m(y)$。

證: 固定 i, 在第 i 個分割中, 設包含 y 的小區間爲 $[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}]$, 由於 y 不是一個分點, 所以 $x_{k_0}^{(i)} < y < x_{k_0+1}^{(i)}$, 因此, 可取充分小的 $\delta > 0$, 使

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}]$$

從而 $$m_{k_0}^{(i)} \leq m_\delta(x_0),$$

即 $$\varphi_i(x_0) \leq m_\delta(x_0)$$

令 $\delta \to 0$, 得 $\varphi_i(x_0) \leq m(x_0)$

若 $m(x_0)=-\infty$, 則 $\varphi_i(x_0)=m(x_0)$, 於是

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0)$$

若 $m(x_0)>-\infty$, 設 $h<m(x_0)$, 則存在 $\delta>0$, 使

$$h<m_\delta(x_0)$$

固定 δ, 由於 $\lambda_i\to 0$ $(i\to\infty)$, 所以可取充分大的 i_0, 使當 $i>i_0$ 時, $[x^{(i)}_{k_0},x^{(i)}_{k_0+1}]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 對於 $i>i_0$, 存在著 $m^{(i)}_{k_0}\geq m_\delta(x_0)>h$, 即

$$\varphi_i(x_0)>h$$

這樣, 對於每一個小於 $m(x_0)$ 的 h, 都有 i_0, 當 $i>i_0$ 時, $h<\varphi_i(x_0)\leq m(x_0)$, 而 $\{\varphi_i(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ 爲有界的單增數列, 因此

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0).$$

引理2: 如果引理1中的函數 $f(x)$ 是有界的, 則

$$\lim_{i\to\infty}(L)\int_a^b\varphi_i(x)dx=(L)\int_a^b m(x)dx.$$

證: 引理1中分割序列的分點 $\{x^{(i)}_k\}$ 全體是一可數集, 其測度爲零, 由引理1, $\varphi_i(x)$ a.e. 收斂於 $m(x)$, 而簡單函數列 $\varphi_i(x)$ 是可測的, 因此 $m(x)$ 可測, 又 $f(x)$ 有界, 即存在 $M>0$, 對任意 $x\in[a,b]$, $|f(x)|\leq M$, 從而 $|\varphi_i(x)|\leq M$, $|m(x)|\leq M$, 應用勒貝格控制收斂定理 [見附註三], 得

$$\lim_{i\to\infty}(L)\int_a^b\varphi_i(\lambda)dx=(L)\int_a^b m(x)dx$$

勒貝格定理的證明: 據引理2,

$$\lim_{i\to\infty}(L)\int_a^b\varphi_i(x)dx=(L)\int_a^b m(x)dx$$

而

$$\begin{aligned}(L)\int_a^b\varphi_i(x)dx&=\sum_{k=0}^{n_i-1}(L)\int_{x^{(i)}_k}^{x^{(i)}_{k+1}}\varphi_i(x)dx\\&=\sum_{k=0}^{n_i-1}m^{(i)}_k m[x^{(i)}_k,x^{(i)}_{k+1}]\\&=\sum_{k=0}^{n_i-1}m^{(i)}_k(x^{(i)}_{k+1}-x^{(i)}_k)\\&=s_i\end{aligned}$$

(s_i 是引理1中分割序列的第 i 個分割的 R 積分小和), 於是

$$\lim_{i\to\infty} s_i = (L)\int_a^b m(x)dx$$

同理, R 積分大和收斂於貝爾上函數的 L 積分,

即
$$\lim_{i\to\infty} S_i = (L)\int_a^b M(x)dx$$

因此
$$\lim_{i\to\infty} (S_i - s_i) = (L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx$$

另一方面, 在數學分析中, 有界函數 $f(x)$ R 可積的充要條件是

$$\lim_{i\to\infty} (S_i - s_i) = 0$$

所以有界函數 $f(x)$ R 可積的充要條件是

$$(L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx = 0$$

或
$$(L)\int_a^b w(x)dx = 0$$

由唯一性定理, 上式成立的充要條件是

在 $[a,b]$ 上 a.e. 有 $w(x)=0$

依定義2, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 a.e. 連續。

換句話說, 有界函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可積的充要條件是: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不連續點集為零測度集。

註: 這個定理的證明, 是參考程其襄等編《實變函數與泛函分析基礎》及那湯松著《實變函數論》, 由本人獨創完成。

推論1: $[a,b]$ 上的連續函數 $f(x)$ 是 R 可積。

因為空集是零測度集。

推論2: $[a,b]$ 上的單調函數 $f(x)$ 是 R 可積。

因為單調函數的不連續點至多可數個, 而可數集的測度為零。

推論3: $[a,b]$ 上的有界變差函數 $f(x)$ [見附註四] 是 R 可積。

因為有界變差函數必能分解成兩個單增函數之差。

推論4: 設 $a<b$, 定義區間 $[a,b]$ 上的狄里克萊 (Dirichlet) 函數 $D(x)$ 如下:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 為 } [a,b] \text{ 上的有理數時,}\\ 0, & \text{若 } x \text{ 為 } [a,b] \text{ 上的無理數時,}\end{cases}$$

則 $D(x)$ 不是 R 可積。

因爲狄里克萊函數處處不連續, 從而其不連續點集的測度總是大於零。

推論5: 定義區間 $[0,1]$ 上的黎曼 (Riemann) 函數 $R(x)$ 如下:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \text{當 } x=\frac{p}{q}\ (p,q\in N_+,\ \frac{p}{q} \text{ 爲既約眞分數}),\\ 0, & \text{若 } x=0,1 \text{ 和 (0,1) 內的無理數時},\end{cases}$$

則 $R(x)$ 是 R 可積。

因爲黎曼函數在 $[0,1]$ 上的所有無理點連續, 所有有理點不連續, 而有理點集是可數的, 其測度爲零。

例1: 設 C 是 $[0,1]$ 上康托 (Cantor) 三分集, 則 C 的特徵函數 $\chi_C(x)=\begin{cases}1, & x\in C\\ 0, & x\notin C\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上 R 可積。對於一般的零測度集, 其結論如何?

證: 顯然 $\chi_C(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 且 $mC=0$。任取一點 $x_0\in[0,1]$, 如果 $x_0\in[0,1]-C$, 對任意的 $\varepsilon>0$, 可取任何正數作 δ, 當 $|x-x_0|<\delta$ $(x\in[0,1]-C)$ 時, 總有 $|\chi_C(x)-\chi_C(x_0)|=|0-0|=0<\varepsilon$, 即 $\chi_C(x)$ 在 x_0 點連續; 如果 $x_0\in C$, 因 C 沒有內點, 故 x_0 的任何鄰域都含有 $[0,1]-C$ 的點, 於是存在 $\varepsilon_0=1$, 對任意的 $\delta>0$, 都有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x\in[0,1]-C$, 使 $|\chi_C(x)-\chi_C(x_0)|=|0-1|=1=\varepsilon_0$, 即 $\chi_C(x)$ 在 x_0 點不連續。由上述可知, $\chi_C(x)$ 在 $[0,1]$ 上的不連續點集爲零測度集, 據勒貝格定理, $\chi_C(x)$ 在 $[0,1]$ 上 R 可積。

對於一般的零測度集 $E\subset[a,b]$, 其特徵函數 $\chi_E(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定 R 可積。

例如, 設 E 是 $[a,b]$ 上的有理數集, 則 $mE=0$, 但這時 $\chi_E(x)$ 正是 $[a,b]$ 上的狄里克萊函數, 由推4, $\chi_E(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是 R 可積。

例2: $[a,b]$ 上有界函數 $f(x)$ R 可積的充要條件是: $f(x)$ a.e. 存在有限的右極限。

證: $f(x)$ 的振幅函數爲

$$w(x)=\lim_{\delta\to 0}\left[\sup_{x-\delta<y<x+\delta}f(y)-\inf_{x-\delta<y<x+\delta}f(y)\right]$$

令 $A_n=\{x\mid x\in[a,b], w(x)>\frac{1}{n}, \lim_{y\to x^+}f(y)$ 存在 $\}$, $n=1,2,\ldots$。則 $f(x)$ 在每個 A_n 上處處不連續但有有限的右極限, 於是 $f(x)$ 不連續且有有限的右極限之點集爲

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

固定 n, 若 $x\in A_n$, 則存在 $\delta>0$, 使得

$$\sup_{x<y<x+\delta} f(y)-\inf_{x<y<x+\delta} f(y)\le \frac{1}{n}$$
$$\lim_{\delta\to 0}\left[\sup_{x<y<x+\delta} f(y)-\inf_{x<y<x+\delta} f(y)\right]\le \frac{1}{n}$$

故當 $y\in(x,x+\delta)$ 時, $w(x)\le\frac{1}{n}$, 即 $(x,x+\delta)\cap A_n=\phi$。這樣對於每個 $x\in A_n$, 對應一個具有上述性質的開區間 $(x,x+\delta)$, 而對於不同的兩點 x, $x'\in A_n$, 它們所對應的這種開區間 $(x,x+\delta)$ 與 $(x',x'+\delta)$ 必不相交, 否則這兩個區間之一的左端點必爲另一區間的內點, 比如 $x'\in(x,x+\delta)$, 這與 $(x,x+\delta)\cap A_n=\phi$ 矛盾, 由此可知, A_n 和這種開區間 $(x,x+\delta)$ 全體構成一一對應, 而直線上互不相交的開區間至多有可數個, 因此 A_n 至多爲可數集, 又可數個至多可數集之聯集仍爲可數集, 是零測度集。

根據 $f(x)$ a.e. 存在有限的右極限的題設可知, $f(x)$ 不連續且右極限不存在之點集 (設爲 B) 是零測度集, 於是 $f(x)$ 不連續點集是兩個零測度集之併 $A\cup B$ 仍是零測度集, 由勒貝格定理, 這正是 $f(x)$ R 可積的充要條件, 從而 $f(x)$ a.e. 有有限的右極限是 $f(x)$ R 可積的充要條件。

例3: 設 F 爲有界閉集, 無處稠密而具有正測度, $a=\inf F$, $b=\sup F$, 在 $[a,b]$ 上定義函數 $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in F\\ (x-a_n)^2(x-b_n)^2\sin\frac{1}{(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)}, & x\in(a_n,b_n),\end{cases}$$

$n=1,2,\ldots$, 其中 (a_n,b_n) 是 F 關於 $[a,b]$ 的餘區間。試證 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上處處存在有限的導數 $f'(x)$, 但 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是 R 可積。

證: 任取一點 $x_0\in F$, $x\in[a,b]$, 設 $x_0<x$。如果 $x\in F$, 則 $f(x)=f(x_0)=0$,

$$f'_+(x_0)=\lim_{xd\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

如果 $x\in(a_n,b_n)$, 則 $x_0\le a_n<x$, 因此 $x-x_0\ge x-a_n$,

$$\begin{aligned}0&\le\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\\ &=\left|\frac{(x-a_n)^2(x-b_n)^2\sin\frac{1}{(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)}-0}{x-x_0}\right|\le\frac{(x-a_n)^2(x-b_n)^2}{x-x_0}\\ &\le\frac{(x-x_0)^2(b-a)^2}{x-x_0}=(x-x_0)(b-a)^2\to 0(x\to x_0^+)\end{aligned}$$

故 $f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$
相似的可得　$f'_-(x_0)=0$,
於是　$f'(x_0)=0$。

另一方面, 如果 $x\in(a_n,b_n)$, 則

$$f'(x)=2(x-a_n)(x-b_n)(2x-a_n-b_n)\sin\frac{1}{(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)}$$
$$-\frac{2x-a_n-b_n}{b_n-a_n}\cos\frac{1}{(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)}$$

綜上可知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上處處存在著有限的導數 $f'(x)$。

題設 F 爲有界閉集, $\overline{F}=F$, 又 F 無處稠密, $\overline{F}$ 沒有內點, 即 F 沒有內點, 對 F 中任一點的任何鄰域都含有 (a_n,b_n) 的點, 即 $f'(x)$ 在 F 的所有點上不連續, 而因 $mF>0$, 由勒貝格定理, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是 R 可積。

附錄:

附註一: 我們知道, 數學分析中所研究的積分都是黎曼 (Riemann) 積分, 簡稱 R 積分, R 積分是一種特殊的極限: 設 $f(x)$ 是定義在 $[a,b]$ 上的有界函數。(i) 在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 個分點

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

記 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$; (ii) 在每個小區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一點 ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$; 作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$; (iii) 命 $\lambda=\max_{i=1,2,\ldots,n}\{\Delta x_i\}$。若不論對 $[a,b]$ 如何分法, 又不論 ξ_i 如何取法, 當 $\lambda\to 0$ 時, 和式的極限存在, 則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可積, 簡稱 R 可積, 並稱此極限值爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼積分, (因爲在歷史上, 黎曼首先在一般形式給出這一定義, 所以叫做黎曼積分), 記作 $\int_a^b f(x)dx$ (或 $(R)\int_a^b f(x)dx$),

$$即\ (R)\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi)\Delta x_i。$$

附註二: 由於 R 積分存在某些缺陷, 人們長期以來致力於改進的嘗試, 直到 1902 年法國數學家勒貝格 (Lebesgue) 才成功地引入了一種新積分, 後人稱之爲勒貝格積分, 簡稱 L 積分。L 積分是 R 積分的一種推廣, R 積分是對函數 $f(x)$ 定義區間 $[a,b]$ 進行分割來定義的, 而 L 積分, 函數 $f(x)$ 定義域爲一般可測集 E, 並對其值域 $[c,d]$ 進行分割來定義的: 設 E 是一個可測集, $mE<\infty$, $f(x)$ 是定義在 E 上的可測函數集, 又設 $f(x)$ 是有界的, 就是說存在實數 c 及 d 使得 $f(E)\subset[c,d]$。(i) 在 $[c,d]$ 中任意插入 $n-1$ 個

分點 $c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=d$; (ii) 記 $\delta=\max_i(y_i-y_{i-1})$, $E_i=E(y_{i-1}\le f(x)<y_i)$, 並任取 $y_{i-1}\le\eta_i\le y_i$, 作和式 $\sum_{i=1}^n\eta_i m(E_i)$; (iii) 若當 $\delta\to 0$ 時, 和式的極限存在, 則稱 $f(x)$ 在 E 上勒貝格可積, 簡稱 L 可積, 並稱此和式的極限值爲 $f(x)$ 在 E 上的勒貝格積分, 簡稱 L 積分, 記作 $\int_E f(x)dx$ (或 $(L)\int_E f(x)dx$), 即

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n\eta_i m(E_i)$$

當 $E=[a,b]$ 時, 記作 $(L)\int_E f(x)dx$。

附註三: 我們知道, R 積分中有黎曼控制收斂定理: 若 $\{f_n(x)\}$, $f(x)$, $F(x)$ 爲 $[a,b]$ 上 R 可積函數, 且 $|f_n(x)|\le F(x)$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 則 $\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx$。$L$ 積分中相應的有勒貝格控制收斂定理: 若 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上可測函數列, $|f_n(x)|\le F(x)$, $F(x)$ 在 E 上 L 可積, 且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e. 於 E, 則 $f(x)$ 在 E 上 L 可積, 且 $\lim_{n\to\infty}(L)\int_E f_n(x)dx=(L)\int_E f(x)dx$。

附註四: 設 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函數, 在 $[a,b]$ 上任取一分點組

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

作和式 $\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 稱它爲 $f(x)$ 對分點組 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 的變差。如果對一切可能的分點組, 變差所形成的數集 $\{\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\}$ 有界, 就稱 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界變差函數。

參考文獻

1. 程其襄等編, 實變函數與泛函分析基礎。北京: 高等教育出版社, 1986.5。
2. [美] B. Gelbaum, 實分析習題及解答。陝西: 陝西人民出版社, 1988.8。
3. [蘇] 那湯松, 實變函數論。北京: 人民教育出版社, 1961.3。

—本文作者任教於中國安徽阜陽師院—