均值定理的一個有趣的幾何意義

黃見利

Lagrange的均值定理對微積分的發展是最重要的定理之一。它是這樣敍述的:

假設函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 連續, 而在開區間 (a,b) 可微, 則必存在一實數 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

另一個重要的定理即是 Rolle 定理:

假設函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 連續, 而在開區間 (a,b)可微, 而且 $f(a)=f(b)=0$, 則必存在一實數 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$。

一般來說, 我們是以下述方式證明均值定理:

首先, 建造一個函數 $\phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 則有 $\phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。再經過替代, 我們得到 $\phi(a)=\phi(b)=0$ 如此 $\phi(x)$ 便滿足了 Rolle 定理的假設, 因而必存在一實數 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\phi'(\xi)=0$。從而 $0=\phi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 定理得證。圖1 爲一般所熟知的幾何意義。

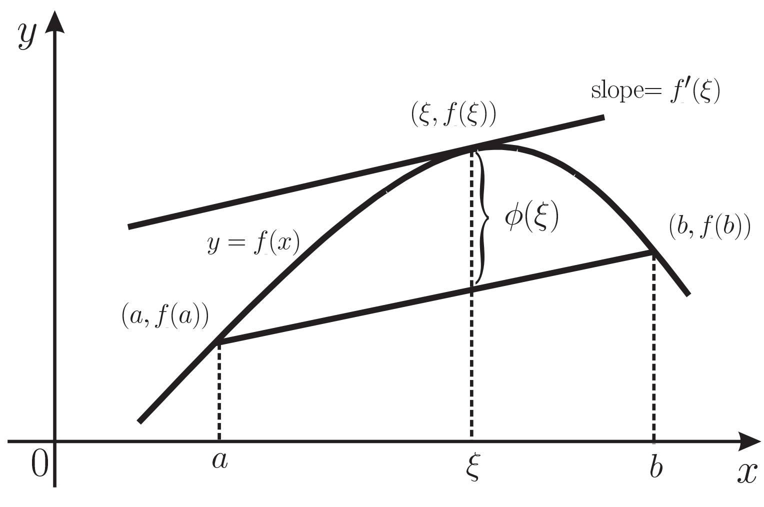

圖1. 均值定理的幾何意義

現在, 我們要給出一個不同的解釋以顯現數學優美的另一面, 由此可得到另一幾何意義。首先, 我們製造一個行列式函數 $\pi(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x & 1\\ f(a) & a & 1\\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}$。然後我們有 $\pi(a)=\begin{vmatrix} f(a) & a & 1\\ f(a) & a & 1\\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}=0=\pi(b)=\begin{vmatrix} f(b) & b & 1\\ f(a) & a & 1\\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}$ 和 $\pi'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & 1 & 0\\ f(a) & a & 1\\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}$。如此 $\pi(x)$ 便滿足了 Rolle 定理的假設, 因而必存在一實數 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\pi'(\xi)=0$。從而 $0=\pi'(\xi)=\begin{vmatrix} f'(\xi) & 1 & 0\\ f(a) & a & 1\\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 定理得證。

現在, 一個有趣的事實出現了。讓 $A(x)=\frac{1}{2}\pi(x)$ 代表某一個三角形的面積函數, 其三個頂點為 $(x,f(x))$, $(a,f(a))$, $(b,f(b))$。我們可用圖2 來體會此事實的幾何意義。

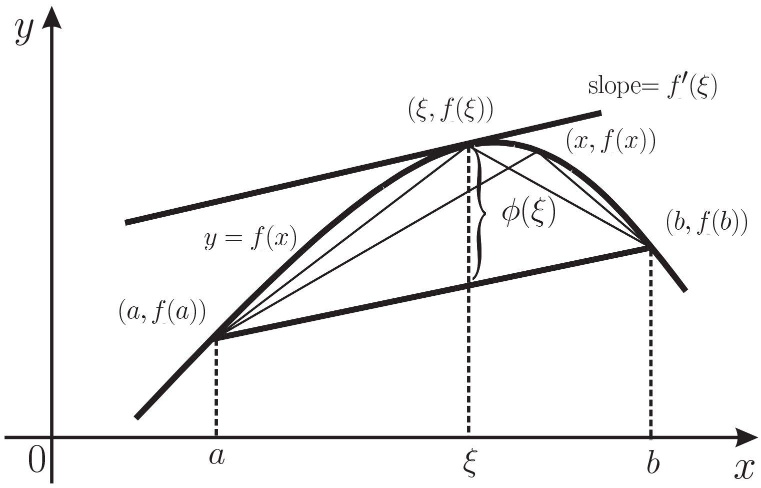

圖2. 均值定理的另一個幾何意義

因此, 我們明顯地了解, 找到一 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是等價於找到一 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\pi'(\xi)=0$ 或 $A(x)$ 有相對極值。圖2 顯示的則是極大值。

在此, 我們還有另一個看法。圖2 中的兩條平行線, 一條通過 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 兩點, 另一條則是通過 $(x,f(x))$。由於 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 是固定的兩點。因此, 我們亦明顯地了解, 找到 $A(x)$ 的相對極值是等價於找到這兩條平行線間距離的相對極值。$\phi(x)$ 即是這兩條平行線間的距離函數。

經由這些想法, 我們還可得到一個令人驚異的事實: 我們甚至不必使用 Rolle 的定理而只需要 Fermat 的定理便可證明 Lagrange 的均值定理!

Fermat 的定理是這樣敍述的:

假設函數 f 在開區間 (a,b) 可微且在 c 有極值, $c\in(a,b)$, 則 $f'(c)=0$。

因爲 $A(x)$ 或 $\phi(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 有界且在開區間 (a,b) 可微, 故有相對極值。

順著相似的思考途徑, 我們就可以證明 Cauchy 的廣義均值定理:

假設函數 f 和 g 在閉區間 $[a,b]$ 連續, 而在開區間 (a,b) 可微。而且, 當 $x\in(a,b)$ 時, $g'(x)\neq 0$ 和 $g(b)-g(a)\neq 0$, 則存在一實數 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

一般來說, 我們是以下述方式證明廣義均值定理:

首先, 建造一個函數 $\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$。然後我們有 $\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$。經由簡單的計算可知 $\Phi(a)=\Phi(b)=0$, 因此 Rolle 定理可應用到 $\Phi(x)$: 必存在一實數 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\Phi'(\xi)=0$, 則有 $0=\Phi'(\xi)=f'(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$, 定理得證。

現在, 如同證明 Lagrange 的均值定理一樣, 我們要展現出另一個數學美。首先, 我們製造一個行列式函數 $\Pi(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}$。然後, 我們有 $\Pi(a)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}=0=\Pi(b)=\begin{vmatrix} f(b) & g(b) & 1\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}$ 和 $\Pi'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & 0\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}$。

如此 $\Pi(x)$ 便滿足了 Rolle 定理的假設, 因而必存在一實數 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\Pi'(\xi)=0$, 從而 $0=\Pi'(\xi)=\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & 0\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}=f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]$, 定理得證。

現在, 另一個有趣的事實出現了。使用行列式的基本行運算, 我們有 $\Pi(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(x)-g(x) & g(x) & 1\\ f(a)-g(a) & g(a) & 1\\ f(b)-g(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}$。因此我們仍有 $\Pi(a)=0=\Pi(b)$ 和 $\Pi'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & 0\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f'(x)-g'(x) & g'(x) & 1\\ f(a)-g(a) & g(a) & 1\\ f(b)-g(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}$。Rolle 定理依然可應用到 $\Pi(x)$, 定

理還是得證!

如果我們使用這樣的一個座標系統, 橫座標爲 $g(x)$ 而縱橫座標爲 $f(x)-g(x)$, 則 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} f(x)-g(x) & g(x) & 1 \\ f(a)-g(a) & g(a) & 1 \\ f(b)-g(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$ 代表某一個三角形的面積函數, 其三個頂點爲 $(g(x), f(x)-g(x))$, $(g(a), f(a)-g(a))$, $(g(b), f(b)-g(b))$, 因此, 事情已經變成非常明顯了。所有我們所需要的只是跟隨先前用來解釋 Lagrange 的均值定理的幾何意義的步驟而已。

感謝

作者在此希望對三位恩師, 臺灣大學數學系陳其誠教授, 輔仁大學數學系葉遷輝教授, 臺灣大學數學系朱樺教授, 表達內心由衷的感謝。在寫作的期間, 由於他們經常的鼓勵和許多有幫助的討論和有價值的建議, 本文才可能完稿。

—本文作者現就讀於國立臺灣大學數學研究所碩士班二年級—