黃金分割、斐氏級數及其文化價值[1]

張維忠

摘要: 在簡要介紹黃金分割與斐波那契級數的基礎上, 探討黃金分割與斐波那契級數存在的廣泛聯繫, 並著重分析黃金分割與斐波那契級數的文化價值。事實上, 黃金分割與斐波那契級數一直被古希臘乃至於歷代偉大的建築家、藝術家和雕塑家們所推崇, 還是人體科學的一個重要規律, 在人體解剖學、生理學和中醫理論中有一系列突出表現, 甚至在萬物生長有規律的自然界中被廣泛地發現, 這種大自然的鬼斧神工, 眞是其妙無窮。

關鍵詞: 黃金分割; 斐氏級數; 文化價值。

1. 黃金分割

“黃金分割” (Golden Section) 相傳是由公元前6世紀古希臘哲學家、數學家畢達哥拉斯 (Pythagoras, 公元前572-前500) 及其學派在五角星中發現的。有一則軼事, 說畢達哥拉斯學派的一個成員流落異鄉, 貧困交迫, 無力酬謝房主的殷勤照顧, 臨終時要求房主在門前畫一個五角星。若干年後, 有同派的人看到這個標誌, 詢問事情的經過, 厚報房主而去。[1] 五角星被認爲是畢達哥拉斯學派兄弟關係的標誌, 後來它又演變成人和神的標誌。這個五角星是一個典型的幾何圖形, 它是由一個正五邊形的對角線所組成的, 如果再仔細觀察, 五條對角線交叉後又構成了另外一個正五邊形, 同時也構成了許多全等的三角形, 如果我們繪出第二個正五邊形的對角線, 剛才的情況會再次出現 (如圖1)。

圖1中各條線段的彼此分割具有穩定性和平衡性。組成五角星的線段, 也就是正五邊形的對角線, 按照一種值得注意的比例相互分割。這一比例歐幾里得 (Euclid, 公元前300前後) 稱其爲最大程度的、平凡的比例: 整個線段與其中較長部分的比例和較長部分與較短部分的比例相同, 這種關係在如此分割的任何長度的線段中都會出現。即把長爲 L 的線段分成兩部分, 使其中較長部分等於較短部分和全部的比例中項, 也就是 $X : L = (L - X) : X$, $X \approx 0.618L$ (圖1中 AB 爲 L,

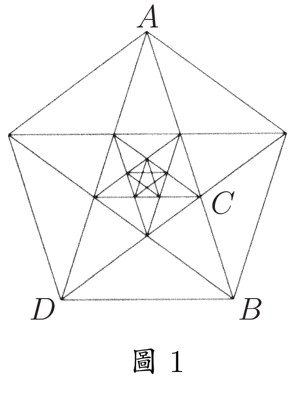


圖 1

[1] 基金項目: 全國教育科學“十五”規劃教育部重點課題: “文化傳統與數學教育現代化” (DHA010276)

AC 為 X)。這樣的分割就稱為 “黃金分割”, 古希臘哲學家柏拉圖 (Plato, 公元前427-前347) 將其命名為 “黃金比”。[2]

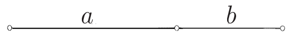


圖2

這種比例是獨特的, 而且是可以測算的。如果把一條線段分割成兩部分: a 和 b (如圖2), 則這兩條線段的比例為: $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$

我們可以把它轉化為: $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}}$, 讓 $\frac{a}{b}=\Phi$, 簡化這一等式得:

$$\Phi=\frac{\Phi+1}{\Phi}=1+\frac{1}{\Phi}, \quad \text{或} \quad \Phi^2-\Phi-1=0,$$

解之得: $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

如果取倒數 ($\frac{1}{\Phi}$), 就會得到一個看似相關的數字: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。如果我們把等式寫成

$$\Phi=\frac{\Phi+1}{\Phi} \quad \text{及} \quad \Phi=1+\frac{1}{\Phi}$$

然後, 以等式右邊的部分代入右邊出現的 Φ, 我們又能得到一個新的等式:

$$\Phi=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}$$

如果我們不斷地將右面的 Φ 用這個等式來取代, 則

$$\Phi=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}$$

連續使用這個等式, 還可以把 Φ 表示成一個複合式的無窮連分數

$$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

另一種展開式是 $\Phi=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$, 這是因為 $a_n=\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}_{n}=\sqrt{1+a_{n-1}}$ 或 $a_n^2=1+a_{n-1}$ (⁎), 不難證明 a_n 遞增且有上界2, 故極限存在, 記 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 對 (⁎) 取極限, 得 $a^2=1+a$, 故 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (取正根), 即 $\Phi=\frac{1}{a}$。

這樣簡潔的連分數以有序而且無窮的印象, 使人有不言而喻的美感, 黃金分割與無窮連分數之間竟有如此迷人的聯繫, 怎不讓人驚歎! 而且其漸近分數正是斐波那契級數相繼之數的比。進一步按照所有神秘主義的解釋, 數1象徵 “宇宙” 或 “神明”; 而且, 由於在有限步內無法求出這個比值, 這更增加了這種解釋的神秘性, 因為無限也是上帝的特徵之一, 這也許就是這個比值

之所以贏得 “上帝的比例” 之名的理由。其實, 古人一點也不知道連分數。他們賦予這種比例以神秘的意義, 自有他們自己的理由: 一半是美學的, 一半是形而上學的, 所以柏拉圖借畢達哥拉斯主義者提馬尤斯 (Timaeus) 的口說出以下的話: “兩個東西不可能有完美的結合, 除非另有第三者存在其間, 因爲它們之間必須有一種結合物, 最好的結合物是比例。設有三個數量, 若中數與小數之比等於大數與中數之比, 反過來, 小數與中數之比等於中數與大數之比 — 則後項就是前項和中數, 中數就是前項和後項, 所以三者必然相同, 即爲相同, 就是一體。”[3]

2. 斐氏級數及其與黃金分割的關聯

中世紀義大利著名數學家斐波那契 (Leonardo Fibonacci, 約1170-約1240)「算盤書」一書中有這樣一道數學題: “如果每對兎子每月可生一對小兎, 每對小兎在第二月也可以生產一對小兎, 如此繼續下去, 且不發生死亡, 問一年中共可生兎多少對?” 以此引出斐波那契級數 (簡稱斐氏級數): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55..., $F_n, \ldots$ 即我們從一對兎子開始, 在第二個月裡兎子數量仍是一對; 而第三個月則有兩對; 第四個月有三對; 第五個月有五對; 第六個月有八對; 如此等等 (如圖3) 。也就是說從第一個月開始, 每一個月兎子對的數量, 均由斐波那契級數相應的項給出。我們來看看該級數的頭幾對相繼數的比:

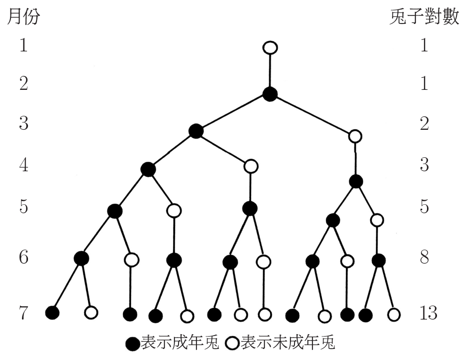


圖3

$1/1 = 1.0000$	$2/1 = 2.0000$	$3/2 = 1.5000$
$5/3 = 1.6667$	$8/5 = 1.6000$	$13/8 = 1.6250$
$21/13 = 1.6154$	$34/21 = 1.6190$	$55/34 = 1.6176$
$89/55 = 1.6182$	$144/89 = 1.6180$	$233/144 = 1.6181$

如果我們的工作遍及整個級數, 將會得到一個奇妙的性質: 這一比值將明顯地趨於一個極限值, 該值位於1.6180與1.6181之間, 它恰好是 “黃金比” 的近似值。它還能準確地以 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 表示出來, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$。

Φ 比率組成的 Φ 級數可以表示: $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots, \Phi^n, \Phi^{n+1}, \Phi^{n+2}, \ldots$

因此, $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$。斐氏級數也有類似這樣的遞推關係:

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n > 2)$。[基爾拉德 (A.Girard,1595-1632) 1634年提出]。這樣斐氏級數、Φ 級數就可以用二項式係數擴展。

$$F_{10} = F_9 + F_8$$

但是,

$$F_9 = F_8 + F_7$$
$$F_8 = F_7 + F_6$$
$$F_{10} = F_8 + 2F_7 + F_6$$

進而,

$$F_8 = F_7 + F_6$$
$$2F_7 = 2F_6 + 2F_5$$
$$F_6 = F_5 + F_4$$
$$F_{10} = F_7 + 3F_6 + 3F_5 + F_4$$

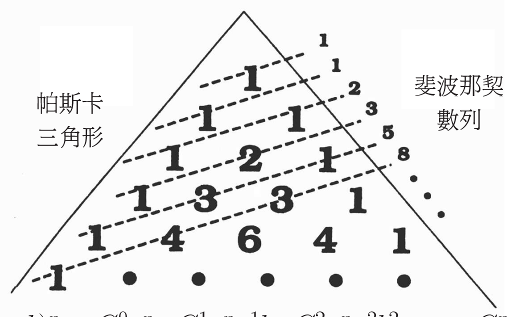
圖4. 算術三角形 (利比里亞)

即

$$F_{10} = 1F_9 + 1F_8 = 1F_8 + 2F_7 + 1F_6$$
$$= 1F_7 + 3F_6 + 3F_5 + 1F_4 = 1F_6 + 4F_5 + 6F_4 + 4F_3 + 1F_2.$$

這樣斐氏級數、牛頓 (I·Newton, 1642-1727) 二項展開式與帕斯卡 (B. Pascal, 1623-1662) 三角形 (帕斯卡並不是這種算術三角形的創始者, 圖4[4] 所示利比里亞郵票上的算術三角形在帕斯卡誕生前302年, 約公元1303年就出現在中國數學家朱世傑的「四元玉鑒」上, 它被命名爲 “古法七乘方圖”, 圖中的二項式係數一直排列到八次冪。在中國這一三角形常常稱爲 “楊輝三角”, 事實上應稱爲 “賈憲三角”。但應該承認帕斯卡發現並證明了算術三角形的一些新的性質)。這些表面上看來毫無相關的數學內容, 實質上有著深刻的聯繫。圖5說明了它們之間的這種親密關係: 沿著帕斯卡三角形斜向點劃線的數累加, 便產生斐氏級數; 帕斯卡三角形的每一列, 則代表二項式 $(a+b)$ 某個特定方展

$(a+b)^0 = 1$ 1
$(a+b)^1 = 1a + 1b$ 1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ 1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ 1 3 3 1



$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

圖5. 牛頓二項展開式

開式的係數。例如:
同樣,

$$\begin{aligned}\Phi^{10} &= 1\Phi^9 + 1\Phi^8 \\ &= 1\Phi^8 + 2\Phi^7 + 1\Phi^6 \\ &= 1\Phi^7 + 3\Phi^6 + 3\Phi^5 + 1\Phi^4 \\ &= 1\Phi^6 + 4\Phi^5 + 6\Phi^4 + 4\Phi^3 + 1\Phi^2 \\ &= 1\Phi^5 + 5\Phi^4 + 10\Phi^3 + 10\Phi^2 + 5\Phi^1 + 1\Phi^0\end{aligned}$$

Φ 的某些項的數值和以各種形式出現的斐氏級數還有如下的關聯:

$$\begin{aligned}\Phi^0 &= 1 = 1 \\ \Phi\ &= 0 + \Phi = 1 + 1/\Phi \\ \Phi^2 &= 1 + \Phi = 2 + 1/\Phi \\ \Phi^3 &= 1 + 2\Phi = 3 + 2/\Phi \\ \Phi^4 &= 2 + 3\Phi = 5 + 3/\Phi \\ \Phi^5 &= 3 + 5\Phi = 8 + 5/\Phi \\ \Phi^6 &= 5 + 8\Phi = 13 + 8/\Phi \\ \Phi^7 &= 8 + 13\Phi = 21 + 13/\Phi \\ \Phi^8 &= 13 + 21\Phi = 34 + 21/\Phi\end{aligned}$$

這裡再給出斐氏級數通項公式的另外一種表示: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$。[棣莫佛 (DeMoivre, 1667-1774) 提出, 比內 (J. P. M. Binet, 1786-1856) 1843年證明, 世稱比內公式] (比內公式在理論上的重要性是不言而喻的, 有關斐氏級數的證明很多要據以推導。但是如果用以計算通項 F_n, 就要做 $2n$ 次無理式乘法, 一次減法和一次除法, 遠不如用基爾拉德公式做 n 次整數加法快。從形式上看, 比內公式通項是用無理數來表示的, 也沒有什麼規律, 可謂"其醜無比", 但它仍然蘊含著內部的美。不論 n 爲任何自然數, F_n 並不是無理數, 而總是正整數, 即用無理數的方冪表示出了正整數。

進一步有研究表明, 斐氏級數與中國古代由洛書演化的"九宮圖"也有內在的聯繫。當用斐氏級數 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 依次替換三階幻方中的數 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 時, 會形成一個新的方陣。這一方陣雖然不具有幻方通常的性質, 但它3個列的乘積的和 $(89 \times 3 \times 34 + 8 \times 21 \times 55 + 13 \times 144 \times 5 = 9078 + 9240 + 9360 = 27678)$ 等於3個行的

乘積的和 $(89\times 8\times 13+3\times 21\times 144+34\times 55\times 5=9256+9072+9350=27678)$。(如圖6)[5]

8	1	6
3	5	7
4	9	2

89	3	34
8	21	55
13	144	5

圖6

我們現在研究斐氏級數的連續項之間的比率會發現非常有趣的特徵。在 Φ 級數中, 比率始終定義爲 Φ, 即1.618 034。下面是我們獲得的比率, 其值或多於或少於 Φ, 其中的偏差可表示爲:

斐氏級數		Φ 比率		與 Φ 的偏差
$5/3$	$=$	1.666666667	$=$	$\Phi+0.048632678$
$8/5$	$=$	1.600000000	$=$	$\Phi-0.018033989$
$89/55$	$=$	1.618181818	$=$	$\Phi+0.000147629$
$144/89$	$=$	1.617977528	$=$	$\Phi-0.000056461$
$4181/2584$	$=$	1.618034056	$=$	$\Phi+0.000000067$
$6765/4181$	$=$	1.618033963	$=$	$\Phi-0.000000026$

斐氏級數一個偶數項被它前面的一個奇數項所除, 得出小於 Φ 的比率; 斐氏級數一個奇數項被它前面的一個偶數項所除, 得出大於 Φ 的比率。例如, 5是斐氏級數的第5個項, 8是第6個項, 89是第11個項, 4181是第19個項。若 n 爲奇數, 則 $F_n\sqrt{5}=\Phi^n+\Phi^{-n}$; 若 n 爲偶數, 則 $F_n\sqrt{5}=\Phi^n-\Phi^{-n}$。因此,

$$\begin{aligned}\frac{F_5}{F_4}&=\frac{\Phi^5+\Phi^{-5}}{\Phi^4-\Phi^{-4}}=\Phi+\frac{\Phi^{-3}+\Phi^{-5}}{F_4\Phi^1+F_4\Phi^{-1}}=\Phi+\frac{\Phi^{-4}}{F_4}\\&=\Phi+\frac{0.145898034}{3}=\Phi+0.048632678\end{aligned}$$

結果與上述 Φ 的偏差值相等。

在一般表示式中, 若 n 爲奇數, 則

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi-\frac{\Phi^{-n}}{F_n}=\Phi-\frac{1}{F_n\Phi^n}$$

若 n 爲偶數, 則

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi+\frac{\Phi^{-n}}{F_n}=\Phi+\frac{1}{F_n\Phi^n}$$

此外, 下列三角比率亦頗爲有趣:

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 1/(2\Phi);$$
$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2;$$
$$\sec 36^\circ = \csc 54^\circ = 2/\Phi;$$
$$\sec 72^\circ = \csc 18^\circ = 2\Phi.$$

由於, $\sin 18^\circ = 1/(2\Phi)$, 則若一個正十邊形的邊長爲1, 弧的半徑則爲 Φ。[6]

3. 文化價值

作爲一種類型的應用, 黃金分割一直被古希臘乃至於歷代偉大的建築家、藝術家和雕塑家們所推崇。在那堪稱西方藝術之父的, 經歷了時間長河的風蝕而殘留的幾乎每一座古希臘建築, 都可以看到舉不勝舉的黃金分割比。古希臘雅典的巴特農神殿, 就是按黃金分割比例來建造的, 其大理石柱廊高恰好占整個神殿高度的0.618。這一比例大量充斥於建築物的外觀、拱道、門, 以及其他關鍵部位。在稍後的年代, 這一比例溶入了達·芬奇 (Da Vinci, 1452-1519) 等人的偉大工作。當一個矩形的長與寬之比成黃金比時, 這個矩形稱爲黃金矩形。達·芬奇就把 “黃金矩形” 引入了繪畫。黃金矩形是一種美麗和令人興奮的數學對象, 其拓展遠遠地超出了數學的範圍, 在藝術、建築、自然界中隨處可見。例如黃金矩形和黃金比例就出現在海洋生物上 —— 無論哪裡有五邊形, 那裡我們就能找到黃金比例。在美國東部海膽的圖案裡, 就有許許多多的五邊形; 而黃金矩形則直接表現在帶小室的鸚鵡螺和其他貝殼類生物上。文藝復興之後, 黃金矩形和黃金分割在藝術中得到了更成功的運用。黃金分割用在藝術上是以生動的對稱技巧爲標誌的。達·芬奇等人都曾在他們的作品中用黃金矩形去創造富有生氣的對稱。事實上, 在自然界裡有許多形狀是對稱的, 如樹葉、蝴蝶、人體、雪花等等, 當然, 也有許多自然界的形狀是不對稱的, 雞蛋、蝴蝶的翅膀、花斑魚等等。這些非對稱的形式同樣具有一種美麗的均衡, 這種均衡就是人們所熟悉的動態的對稱。在所研究的動態對稱的形狀中, 我們總能找到黃金矩形、黃金比例或黃金分割。達·芬奇的名畫「最後的晚餐」中, 猶大的形象就正處在黃金分割點上。黃金分割還出現在達·芬奇未完成的作品「聖徒傑羅姆」中。該畫約作於公元1483年。在這幅作品中, 聖徒傑羅姆的像完全位於黃金矩形內。這不是偶然的巧合, 而是達·芬奇有目的地使畫像與黃金分割相一致。因爲在達·芬奇的著作和思路中, 處處表現出對數學應用的強烈興趣。達·芬奇說過: “······ 沒有什麼能不通過人類的探求而稱之爲科學的, 除非它是通過數學的解釋和證明的途徑。”[5] 時至今日, 黃金分割依然呈現於衆多的最優秀的時代建築、藝術、設計等等之中 —— 從埃菲爾建造的巴黎大鐵塔直至女性的裙子! 事實上, 即使那些華美而時髦的裙子, 也同樣偏愛於這一美的

旋律! 今天黃金矩形正在廣告和商業等方面派上用場。許多包裝採用黃金矩形的形狀, 能夠更加迎合公衆的審美觀點。例如標準的信用卡就近似一個黃金矩形。

達·芬奇的朋友盧卡·帕希奧裡 (Luca Pacioli) 曾把黃金分割比 Φ 稱爲 “上帝的比例”。而後, 開普勒 (J. Kepler, 1571-1630) 甚至把它作爲天文研究的中心。“幾何學有兩大筆財富: 一個是畢達哥拉斯定律, 另一個則是將線分割成了極有意義的比例。前者的價值我們把它比作黃金, 後者則是貴重的珠寶。” 事實上, “上帝的比例” 還是人體科學的一個重要規律, 它在人體解剖學、生理學和中醫理論中有一系列突出表現。從經絡系統看, 人體幾個大穴處於相應範圍的黃金分割點處。中醫有天地人三才學說, 氣功理論認爲百會、湧泉和勞宮分別是天氣穴、地氣穴和人氣穴。百會基本位於前發際至後發際的0.618處, 是督脈上的穴位。督脈行于背部正中, 總督一身之陽經。百會可以通天氣, 故稱天氣之穴。湧泉穴在足底部的0.618處, 是腎經的起點。腎爲臟腑陰陽之本, 生命之源, 湧泉穴可以接地氣, 故稱地氣之穴。勞宮穴則基本上在手掌的0.618處, 是心包經的滎穴, 與心相通, 氣功多通過此穴發放外氣, 故稱人氣之穴。從人體結構看, 人體各範圍的黃金分割點多處於骨骼的關節, 具有重要的生理意義。很多器官的結構也符合黃金分割的規律, 如鼻子硬骨與軟骨交界爲鼻子全長的0.618, 耳孔在整個耳朵的0.618處, 胸骨角在整個胸骨的0.618處。整個脊柱的0.618處是胸與腰的分界, 即十二胸椎。從第一頸椎至第十二胸椎, 其0.618處是胸與頸的分界, 即第七頸椎。從第一腰椎至尾椎, 其0.618處是腰與骶骨的分界, 即第五腰椎。從骶骨至尾骨, 其0.618處是骶骨與尾骨的分界, 即骶骨裂孔。從肚臍至膻中, 其0.618處是胸腔與腹腔的分界, 即劍突。從膻中至口, 其0.618處是頸與胸腔的分界, 即胸骨柄上緣。從生理方面看,「內經」認爲人體的陽氣從卯時開始由體內布於體表, 即所謂 “平旦人氣生” (平旦即卯時。在酉時, 人體陽氣開始由體表入體裡, 即所謂 “日西而陽氣已虛, 氣門乃閉” (日西即酉時)。在病情方面,「內經」又言: “旦慧, 晝安, 夕加, 夜甚。” 即在早晨, 疾病好轉, 症狀減輕, 白日較爲好過, 黃昏時分, 病情開始加重, 夜間更甚。從中可以看出, 一日的整個過程, 疾病的轉捩點在 “旦”、“夕”, 也即卯、酉二時, 這與人體生理上陽氣的出入時刻是吻合的, 同樣是在每天的兩個對稱的黃金分割點上, 這與太陽的東升西落同步, 正是中醫傳統理論中 “天人相應” 的觀點, 即所謂「內經」中的 “人與天地相合也, 與日月相應也。”[7]

“上帝的比例” 還廣泛地在萬物生長有規律的自然界中被發現。例如, 上帝的比例控制著蝸牛殼的外形, 它有組織地生長著, 在增大尺寸的同時保持著類似的外形; 同時, 上帝的比例還控制著葉子在莖上生長的順序、向日葵的排列, 甚至人臉的比例。顯然在有機世界中它是有規律性和周期性的 (上帝的比例在無機世界中是從來沒有存在過的。例如, 水晶是以不同的比例爲基礎的, 它是六邊形而不是畢達哥拉斯學派的五邊形)。[8] 值得指出的是, 稱爲 “上帝的比例” 的 Φ, 不僅可以詮釋美的藝術及人類欣賞美的原則, 而且還可以解釋活體生物生長的現象。但 Φ 不是一紙丹符, 有了這張丹符, 任何一位現代數學家, 就可以製造出足以與希臘雕塑或繪畫分庭抗禮

的作品。因爲 Φ 不是通向美學的皇家康莊大道, 也無論如何不可能消除藝術作品的魅力和神韻。但是 Φ 的確說明, 如果我們認識到在美和生活中可以觀察到變異和差異, 我們則會發現它們都可以用同樣的基本原則來說明。藝術對自然作出詮釋, 藝術本身也是自然的組成部分。因此, 從邏輯上說, 藝術詮釋的符號也應該在它們所激勵的語言中得到共鳴。

從黃金分割的數學表達來看, 似乎發現不了它與自然界的某種聯繫, 但我們注意到數學內部的和諧與統一, 將黃金分割與斐波那契級數、連分數聯繫起來分析其內在的深層階構, 就會發現由黃金分割的定義即可得到一個正則連分數, 而這個正則連分數其漸進分數正是斐波那契級數相繼項之比, 即正則連分數的漸近分數的分子、分母依次構成斐波那契級數, 這是連分數運算的結果。因此, 斐波那契級數與黃金分割之間的聯繫並非偶然的巧合, 也並不神秘, 連分數是聯繫二者的紐帶。而兎子問題僅僅屬於實際中的一個特例, 投合了上述數學模式。[9] 值得注意的是, 斐波那契級數與大自然有許多天然的聯繫。在花的花瓣中就存在著一個奇特的模式, 幾乎所有的花, 花瓣數目是如下奇特序列的數位中的一個: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89。例如百合花花瓣有 3 瓣; 毛茛屬植物有 8 瓣; 萬壽菊有 13 瓣; 紫菀屬植物有 21 瓣; 大多數雛菊有 34、55 或 89 瓣。花瓣不是斐波那契級數的唯一例子。如果你觀察大向日葵, 你在其葵花盤中會發現很顯著的小花 —— 最終變成葵花籽的小花模式。小花呈現兩族相向螺線排列, 一族順時針旋轉, 另一族逆時針旋轉。在某些品種裡, 順時針螺線的數目是 34, 逆時針螺線的數目是 55。它們都是這個級數中接連出現的斐波那契數。準確的數位依賴於向日葵的品種, 但往往會得到 34 和 55, 或 55 和 89, 或甚至 89 和 144, 或更大的斐波那契數。鳳梨有 8 行向左邊斜的鱗苞 —— 方塊形的鎧甲, 還有 13 行向右邊斜的鱗苞。[10] 如果我們廣爲搜尋, 那麼有時我們還會發現, 斐波那契數竟然會出現在一些特殊的物件中。例如一架鋼琴, 在一個音階中白色的鍵數爲 8, 黑色的鍵數爲 5。許多在實際中發生的事情就象兎子問題那樣, 其排列情況都與斐波那契級數有關。這是生物進化過程中進化規律作用的結果, 生物調節以便得到充足的光照等最優化具有 "天然合理" 的意義。一個簡單的斐波那契級數, 居然能有如此多樣性的聯繫, 難道不足以令人驚訝嗎? 在人們的感知中, 這種大自然的鬼斧神工, 眞是其妙無窮。

事實上, 在剛剛過去的 20 世紀這一百年間, 爲數衆多的學者都對斐波那契級數在衆多領域內進行聯繫和鑽研, 已取得許許多多令人驚歎的有趣結果。我國近年對其研究也發表論文、專著多種。[11] 兎子問題純是遊戲筆墨, 當時並不顯眼, 斐波那契播下的種子, 經人們培育, 數百年來枝葉繁茂, 小草竟成喬木。斐波那契級數具有如此多種性質及其有關知識, 令人十分震驚, 充分挖掘衆多這樣的素材, 爲中小學數學課程與教學服務, 在凸現數學的文化價值的同時, 必能進一步提升學生學習數學的興趣。

參考文獻

1. 梁宗巨。數學歷史典故。瀋陽: 遼寧教育出版社, 1995, 204。
2. (美) 愛德華·羅特斯坦。心靈的標符。李小東譯。長春: 吉林人民出版社, 2001, 141-143。
3. (美) T·丹齊克。數: 科學的語言。蘇仲湘譯。上海: 上海教育出版社, 2000, 214。
4. (英) 羅賓·J·威爾遜。郵票上的數學。李心燦, 鄒建成, 鄭權譯。上海: 上海科技教育出版社, 2002, 17。
5. (美) T·帕帕斯。數學趣聞集錦 (上)。張遠南, 張昶譯。上海: 上海教育出版社, 2001, 88, 34。
6. (英) 特奧多·安德列·庫克。生命的曲線。周秋麟, 陳品建, 戴聰騰譯。長春: 吉林人民出版社, 2001, 561-569。
7. 裴雪重, 高世金。黃金分割與人體科學。科學, 1998, 50(6):44-45。
8. (美) 愛德華·羅特斯坦。心靈的標符。李小東譯。長春: 吉林人民出版社, 2001, 145-146。
9. 張雄。黃金分割的美學意義及其應用。自然辯證法研究。1999, 15(11):5-8。
10. 伊恩·斯圖爾特。自然之數。潘濤譯。上海: 上海科學技術出版社, 1996, 6, 93。
11. 吳振奎。斐波那契數列。瀋陽: 遼寧教育出版社, 1997。

—本文作者現爲浙江師範大學數理學院教授, 博士—