三角形內的比例線段 (五)

劉俊傑

一. 前言

大約十年前, 筆者曾在數學傳播第十九卷第二期中, 以「三角形內的比例線段」爲題, 寫過一篇短文 [1]。該文的主要內容, 是從 Menelaus 定理出發, 建立了一套三角形內兩相交線段, 所產生出的比例關係式, 共計有六組三十七個等式, 合稱爲「線基公式」。隨後以這套公式做爲基礎, 討論了一系列所謂「比例三角形」內點共線及線共點的問題, 陸續又做了三篇短文 [2] [3] [4], 這些短文請至中央研究院數學研究所的網站上查詢。

在之前的四篇文章中, 爲了要證明一個由比例所決定的三線共點的論題, 論證中常要利用到兩個甚至更多的線基公式, 作爲論據。後來發現到, 我們可以嘗試將幾個線基公式加以合併, 而得到能夠直接就判定三線是否共點的比例關係式, 這就是本文中所要介紹的三個主要命題。根據這三個命題, 我們可以討論在某些特定比例值條件下的三線共點的性質。

事實上, 大家所熟悉的 Ceva 定理, 就是一個以比例值來判別三角形內三線段是否共點的標準, 而本文中的命題一就是嘗試要將 Ceva 定理做進一步的推廣。

本文命題的論證中, 有引用到幾個在「三角形內的比例線段」[1] 所介紹的線基公式, 爲了證明的完整性, 在此先將這幾個公式列出, 以提供各位參考。

(一) 公式 IV-(1)

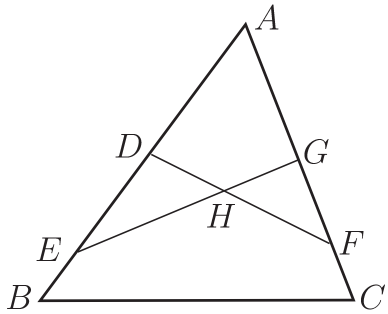
若 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{e}{f}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{g}{h}$,

則 $\dfrac{\overline{EH}}{\overline{HG}}=\dfrac{f(g+h)(bc-ad)}{a(c+d)(fg-eh)}$。(如圖 A)

(二) 公式 IV-(4)

若 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{a}{b}$ $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{e}{f}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{g}{h}$,

則 $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HF}}=\dfrac{h(e+f)(bc-ad)}{c(a+b)(fg-eh)}$。(如圖 A)



圖A

(三) 公式 V-(1)

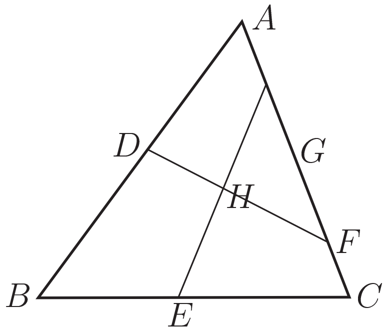
若 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{e}{f}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{g}{h}$,

則 $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{HE}}=\dfrac{a(c+d)(fg-eh)}{(h+g)(bdf+ace)}$。(如圖 B)

(四) 公式 V-(4)

若 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{e}{f}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{g}{h}$,

則 $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HF}}=\dfrac{(e+f)(acg+bdh)}{d(a+b)(fg-eh)}$。(如圖 B)



圖B

二. 判別共點的三個命題

命題一: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F 在 $\overline{AB}$ 邊上; H, E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{a}{b}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$, $\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\frac{e}{f}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{g}{h}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{k}{l}$, 那麼 $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ 三線段共點, 若且唯若 $\frac{cek+dfl}{fjk-fil}=\frac{bcg-adg}{bhj+agi}$。(如圖1)

證明:

(1) 充分條件

令 $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ 三線段相交於點 O

將已知 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$, $\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\frac{e}{f}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{k}{l}$,

代入公式 V-(4), 得到 $\dfrac{\overline{FO}}{\overline{OG}}=\dfrac{(i+j)(cek+dfl)}{f(c+d)(jk-il)}$

再將已知 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{g}{h}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{a}{b}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$,

代入公式 V-(1), 得到 $\dfrac{\overline{FO}}{\overline{OG}}=\dfrac{g(i+j)(bc-ad)}{(c+d)(bhj+agi)}$

比較上述兩式即可得證 $\dfrac{cek+dfl}{fjk-fil}=\dfrac{bcg-adg}{bhj+agi}$。

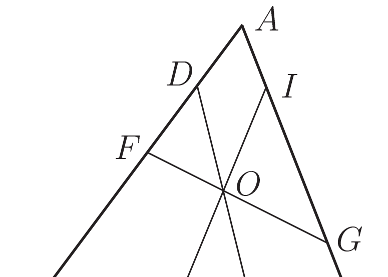


圖1

(2) 必要條件

令 $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ 相交於 O 點, 延長 $\overline{DO}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E_1, 設 $\frac{\overline{BE_1}}{\overline{E_1C}}=\frac{g_1}{h_1}$,

根據 (1) 有 $\dfrac{cek+dfl}{fjk-fil}=\dfrac{bcg_1-adg_1}{bh_1j+ag_1i}$

由已知得到 $\dfrac{bcg-adg}{bhj+agi}=\dfrac{bcg_1-adg_1}{bh_1j+ag_1i}$

計算化簡爲 $\dfrac{g_1}{h_1}=\dfrac{g}{h}$

也就是說 $\dfrac{\overline{BE_1}}{\overline{E_1C}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ 經合比得 $\overline{BE_1}=\overline{BE}$, 此即 $E_1=E$

所以 $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ 三線段共點。

說明:

1. 命題一爲三角形的三邊上各有兩個內分點的情形。
2. 我們可稱 $\dfrac{cek+dfl}{fjk-fil}=\dfrac{bcg-adg}{bhj+agi}$ 爲這種共點情形的判別式。
3. 必要條件的證明中, 所用的方法稱爲 “同一法” [5]。

例1: Ceva Theorem (西瓦定理)

在 $\triangle ABC$ 中, 設 F 在 $\overline{AB}$ 邊上; E 在 $\overline{BC}$ 邊上; I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 若 $\overline{AE}$, $\overline{BI}$, $\overline{CF}$ 三線段共點, 則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=1$。(如圖2)

證明: 考慮命題一的條件, 我們僅需將 $\overline{AD}$, $\overline{BH}$, $\overline{CG}$ 視爲零, 即可得證西瓦定理。設 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{0}{1}$, $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\dfrac{0}{1}$, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{g}{h}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{0}{1}$, $\dfrac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\dfrac{k}{l}$,

根據命題一 得 $\dfrac{dl}{k}=\dfrac{cg}{h}$

也就是 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\dfrac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=1$。

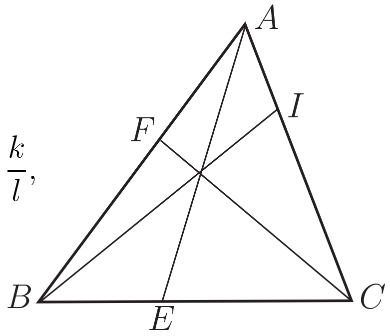


圖2

由此可知: 命題一爲西瓦定理的推廣, 西瓦定理就是當三角形的三邊上各有一個內分點爲端點的情形。由於命題一可推導出西瓦定理, 所以可利用西瓦定理證明的幾何性質, 自然也就可以由命題一得證。例如: 重心定理、內心定理及垂心定理等的共點性質。

例2: 設 $\triangle ABC$ 的兩條角平分線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 交於 I, M 是 $\overline{AB}$ 邊中點, 直線 MI 與 $\overline{CA}$ 交於 P。已知: $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, 求 $\overline{AP}$ 之長。(如圖3)

(本例題取自張景中教授所著「平面幾何新路」[6])

解: 由角平分線定理和已知條件, 設

$\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PA}}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\overline{AA}}{\overline{AB}}=\dfrac{0}{1}$ (退化),

$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\dfrac{1}{1}$, $\dfrac{\overline{BB}}{\overline{BC}}=\dfrac{0}{1}$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{c}{b}$,

代入命題一得到 $\dfrac{bc}{c}=\dfrac{ax-c}{x}$

化簡為 $x=\dfrac{c}{a-b}$

所以 $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{c}{a-b}}{\frac{c}{a-b}+1}=\frac{c}{a-b+c}$, $\overline{AP}=\frac{bc}{a-b+c}$。

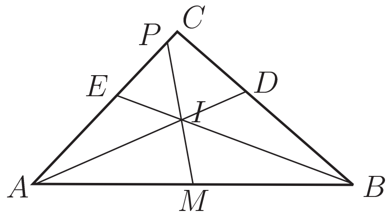


圖3

建議各位讀者有機會, 不妨試用本文中所介紹的公式, 解出一些書本上的習題。

依據命題一, 我們可以討論某些求特定條件下的比例值的問題, 如下述的例3。

例3: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F 在 $\overline{AB}$ 邊上; H, E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{y}{1}$, $\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{y}{1}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{y}{1}$, 若 $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ 三線段共點, 求 x 與 y 的比例關係式。(如圖4、5)

解: 將已知條件代入命題一得 $\dfrac{y^2+x}{x^2y-x}=\dfrac{xy^2-y}{x^2+y}$

化簡為 $x^3y^3-x^3-y^3-3x^2y^2=0$

令 $y=kx$, $k>0$, 代入上式化簡為

$k^3x^3-3k^2x-k^3-1=0$ 因式分解

$[kx-(k-1)][k^2x^2+(k^2+k)x+(k^2-k+1)]=0$

後項二次多項式的判別式為 $-3k^2(k-1)^2$ 恆小於零。

因此只有 $x=\frac{k+1}{k}$ 的實數解, 此時 $y=k+1$。

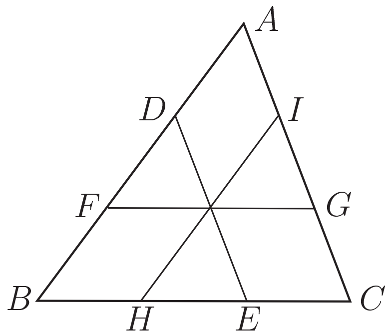


圖4

例如:

$k=1$ 時 $x=2$, $y=2$ (如圖4)

$k=2$ 時 $x=\frac{3}{2}$, $y=3$ (如圖5)

說明:

(1) 此例題的條件也可以寫成 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}$, 且 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}$。

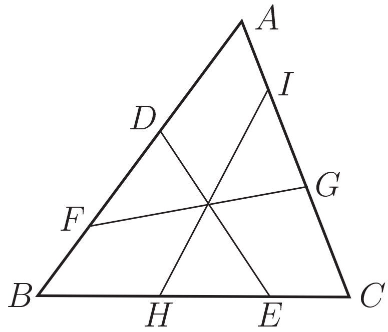


圖5

(2) 觀察 k 值的增減可以看到 D, F, H, E, G, I 等六個比例點, 相關位置的連續變化情形。由於 $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1$, 且 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0$, 這表示說當 k 值越來越大 (如圖5-1, 爲 $k=5$ 的圖形), 趨近於無限大時, F 點接近頂點 B, E 接近 C, I 接近 A, 同時 D、H、G 則接近中點。其次因爲 $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=0$, 且 $\lim_{k\to 0}\frac{k+1}{1}=1$, 這表示說當 k 值越來越小, 趨近於零時, D 點接近頂點 A, H 接近 B, G 接近 C, 同時 F、E、I 則接近中點。

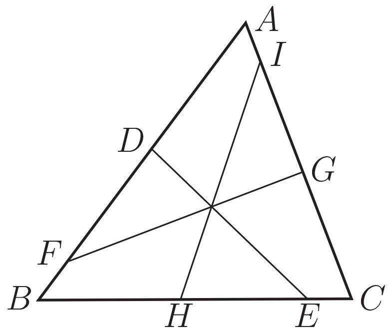


圖5-1

有趣的是在這兩種極限情況下, $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 就都將會成爲 $\triangle ABC$ 的三條中線。可以證明的, 這一類圖形的三線共點位置都會落在三角形的重心上。

例4: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F 在 $\overline{AB}$ 邊上; H, E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{t}{t+1}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{t+1}{1}$, $\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=\frac{t}{t+1}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{t+1}{1}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{t}{t+1}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{t+1}{1}$, 求證 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 的共點位置在 $\triangle ABC$ 的重心上。(如例3的圖4、5)

證明: 首先證明 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與中線 $\overline{AM}$ 共點 (如圖6)

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{t}{t+1}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{t+1}{1}$, $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\frac{1}{1}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{t+1}{1}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{t}{t+1}$, $\frac{\overline{AA}}{\overline{CA}}=\frac{0}{1}$,

代入命題一, 有 $(cek+dfl)(bhj+agi)=t^2+t+1$ 且

$(bcg-adg)(fjk-fil)=t^2+t+1$, 因此三線共點,

其次證明此交點即爲重心,

設 $\overline{FG}$ 與中線 $\overline{AM}$ 交於 O 點,

將 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{t+1}{1}$, $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\dfrac{1}{1}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{t}{t+1}$,

代入公式 III-3計算出 $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OE}}=\dfrac{(t+1)(t+1)2}{t(t+1)+(t+1)}=2$

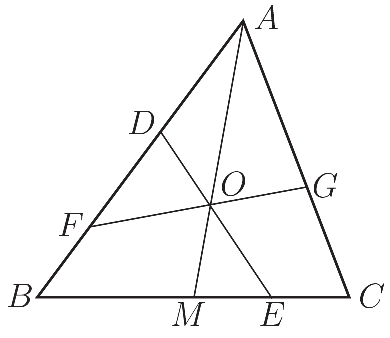


圖6

得證點 O 爲 $\triangle ABC$ 的重心

同理可證, $\overline{DE}$ 與 $\overline{HI}$ 的交點位置也在 $\triangle ABC$ 的重心上

由例3知 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 共點,

得證 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 的共點位置在 $\triangle ABC$ 的重心上。

命題二: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F, H 在 $\overline{AB}$ 邊上; E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{a}{b}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{e}{f}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{g}{h}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{k}{l}$, 那麼 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 三線段共點, 若且唯若 $\frac{l(de-cf)}{e(bc-ad)}=\frac{g(jk-il)}{bhj+agi}$。(如圖7)

證明:

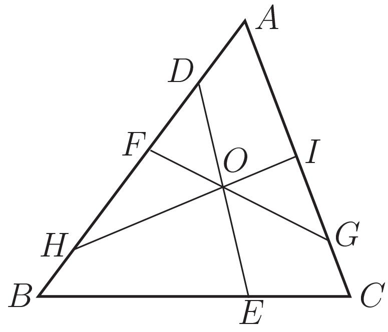


圖7

(1) 充分條件

令 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 三線段相交於 O 點

將已知 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\dfrac{e}{f}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{i}{j}$, $\dfrac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\dfrac{k}{l}$,

代入公式 IV-(4),

得到 $\dfrac{\overline{FO}}{\overline{OG}}=\dfrac{l(i+j)(de-cf)}{e(c+d)(jk-il)}$,

再將已知 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{g}{h}$, $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\dfrac{i}{j}$, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{c}{d}$,

代入公式 V-(1),

得到 $\dfrac{\overline{FO}}{\overline{OG}}=\dfrac{g(i+j)(bc-ad)}{(c+d)(bhj+agi)}$

比較上述兩式即可得到關係式 $\dfrac{l(de-cf)}{e(bc-ad)}=\dfrac{g(jk-il)}{bhj+agi}$。

(2) 必要條件

必要條件的證明, 如同命題一, 可以用同一法得證, 在此省略。

說明:

1. 命題二為三角形三邊上各有三、一、二個內分點的情形。
2. 我們可稱 $\frac{l(de-cf)}{e(bc-ad)}=\frac{g(jk-il)}{bhj+agi}$ 為這種共點情形的判別式。

如同前面的例題3, 根據命題二, 我們可以特別設定某些比例條件, 來討論三角形內三線共點的性質。

例5: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F, H 在 $\overline{AB}$ 邊上; E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{y}{1}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{x}{1}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{y}{1}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{1}{y}$, 那麼 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 三線段共點, 求 x 與 y 的比例關係式。(如圖8)

解: 將已知條件代入命題二得 $\frac{y(x-y)}{x(xy-1)}=\frac{y(x-y)}{x^2+y}$

化簡爲 $x^2y-x^2-x-y=0$

令 $y=kx$, $k>0$, 代入上式化簡爲

$kx^3-x^2-x-kx=0$ 因式分解

$(x+1)(kx-k-1)=0$

有 $x=\frac{k+1}{k}$ 的解, 同時 $y=k+1$。

例如: $k=2$ 時 $x=\frac{3}{2}$, $y=3$ (如圖8)

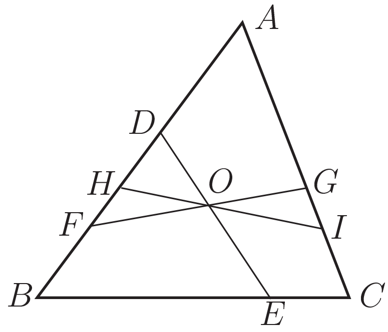


圖8

說明:

(1) $k\neq 1$, 因爲 $k=1$ 時 $x=2$, $y=2$, G、I 爲同一點。

(2) 比較此例題與例3, 在圖形上有明顯的不同 (點 H 的位置), 且比例值的設定也不盡相同 (例5中 $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{x}{I}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{1}{y}$), 但 x 與 y 的比例關係式卻完全一致, 頗值得玩味。

(3) 利用例4的方法可以得到, 例5中 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 的交點位置, 也都在 $\triangle ABC$ 的重心上的結果。

例6: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F, H 在 $\overline{AB}$ 邊上; E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{1}{y}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{x}{1}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{1}{x}$, $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{1}{y}$, $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{x}{1}$, 那麼 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 三線段共點, 求 x 與 y 的比例關係式。(如圖9、10)

解: 將已知條件代入命題二得 $\frac{1(xy-1)}{x(x-y)}=\frac{1(xy-1)}{x^2y+1}$

化簡爲 $x^2y-x^2+xy+1=0$

令 $y=kx$, $k>0$, 代入上式化簡爲

$kx^3-x^2+kx^2+1=0$ 因式分解

$(x+1)(kx^2-x+1)=0$

有 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4k}}{2k}$ 的解, 同時 $y=\frac{1\pm\sqrt{1-4k}}{2}$。

例如:

$k=\frac{3}{16}$ 時 $x=4$, $y=\frac{3}{4}$ (如圖9)

或 $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{1}{4}$ (如圖10)

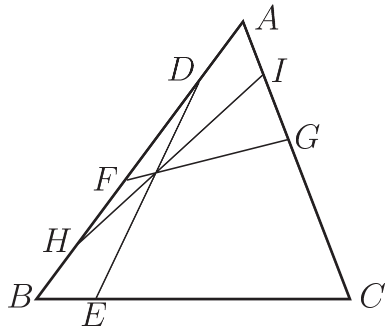


圖9

說明:

(1) $k\neq\frac{1}{4}$, 因爲 $k=\frac{1}{4}$ 時 $x=2$, $y=\frac{1}{2}$, F、H 爲同一點。

(2) 此例題當 k 爲某一定值時可得到兩組解, 可稱這兩組解互爲共軛解。當 k 值不同時, 三線交點的位置會有所不相同; 但有趣的是, 共軛解的交點位置, 卻是一樣的, 請看例7的證明。

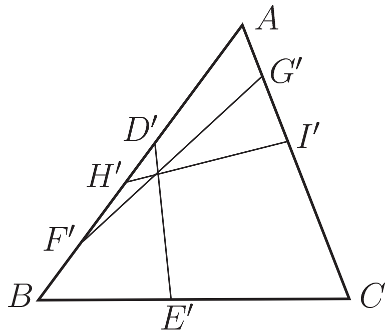


圖10

例7: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F, H 在 $\overline{AB}$ 邊上; E 在 $\overline{BC}$ 邊上; G, I 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{2k}{1+\sqrt{1-4k}}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-4k}}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2k}$, (如圖9); 另設 D', F', H' 在 $\overline{AB}$ 邊上; E' 在 $\overline{BC}$ 邊上; G', I' 在 $\overline{CA}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}}=\frac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}}=\frac{2k}{1-\sqrt{1-4k}}$, $\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}=\frac{\overline{CG'}}{\overline{G'A}}=\frac{2}{1-\sqrt{1-4k}}$, $\frac{\overline{AH'}}{\overline{H'B}}=\frac{\overline{CI'}}{\overline{I'A}}=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2k}$, (如圖10), 求證 $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$, $\overline{D'E'}$ 四條線段共點。

證明:

(1) 首先證明圖9中的 $\overline{FG}$ 就是在圖10的 $\overline{H'I'}$, 由已知 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-4k}}=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2k}=\frac{\overline{AH'}}{\overline{H'B}}$, 因此 $F=H'$, 同理 $\frac{\overline{CG}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{CI'}}{\overline{I'A}}$, 得 $G=I'$。

(2) 其次證明圖9中的 $\overline{HI}$ 就是在圖10的 $\overline{F'G'}$, 由已知 $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2k}=\frac{2}{1-\sqrt{1-4k}}=\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}$, 因此 $H=F'$, 同理 $\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{CG'}}{\overline{G'A}}$, 得 $I=G'$, 依據例6, $\overline{DE}$ 過 $\overline{FG}$, $\overline{HI}$ 的交點, $\overline{D'E'}$ 過 $\overline{F'G'}$, $\overline{H'I'}$ 的交點, 綜合上述結果, 得證 $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$, $\overline{D'E'}$ 四條線段共點。

命題三: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 D, F, H 在 $\overline{AB}$ 邊上; E, G, I 在 $\overline{BC}$ 邊上, 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{a}{b}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{e}{f}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{g}{h}$, $\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{BI}}{\overline{IC}}=\frac{k}{l}$, 那麼 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 三線段共點, 若且唯若 $\frac{b(de-cf)}{f(bc-ad)}=\frac{g(jk-il)}{k(hi-gj)}$。(如圖11)

證明:

(1) 充分條件

令 $\overline{DE}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{HI}$ 三線段共點於 O 點

將已知 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{g}{h}$, $\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{a}{b}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$,

代入公式 IV-(1), 得到 $\frac{\overline{GO}}{\overline{OF}}=\frac{b(c+d)(hi-gj)}{g(i+j)(bc-ad)}$,

再將已知 $\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\frac{i}{j}$, $\frac{\overline{BI}}{\overline{IC}}=\frac{k}{l}$, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{c}{d}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{e}{f}$,

代入公式 IV-(4), 得到 $\frac{\overline{GO}}{\overline{OF}}=\frac{f(c+d)(jk-il)}{k(i+j)(de-cf)}$,

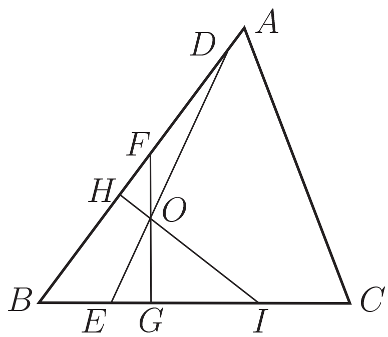


圖11

比較上述兩式即可得關係式 $\frac{b(de-cf)}{f(bc-ad)}=\frac{g(jk-il)}{k(hi-gj)}$。

(2) 必要條件

必要條件的證明, 如同命題一, 可以用同一法得證, 在此省略。

說明:

1. 命題三爲三角形的三邊上各有三、三、零個內分點的情形。
2. 我們可稱 $\frac{b(de-cf)}{f(bc-ad)}=\frac{g(jk-il)}{k(hi-gj)}$ 爲這種共點情形的判別式。

三. 結語

在高中的基礎數學教材中, 有許多主要單元, 都是以相似三角形邊長成比例的性質, 爲理論的根源。例如: 三角函數的定義、求直線方程式以及內插法等。筆者在高中服務了一些時日, 也因此對比例的性質, 特別的感到有興趣。

如果各位敬愛的讀者, 以後有機會遇到一些三角形內由比例所決定的共點或求邊長等的問題時, 可以試用本文中的三個命題來驗算看看, 或許還眞的能得到滿意的解答, 這也將是在下我最感到高興的事。

參考文獻

1. 劉俊傑, 三角形的比例線段 (一), 數學傳播, 第十九卷第二期, 1995年6月, p.76-p.85。
2. 劉俊傑, 三角形的比例線段 (二), 數學傳播, 第二十卷第三期, 1996年9月, 性質1-性質20, p.60-p.68。
3. 劉俊傑, 三角形的比例線段 (三), 數學傳播, 第二十一卷第一期, 1997年3月, 性質21-性質37, p.54-p.66。
4. 劉俊傑, 三角形的比例線段 (四), 數學傳播, 第二十一卷第三期, 1997年9月, p.54-p.62。
5. 九章出版社, 解題思路—如何作證明題, 2000年9月, p.64。
6. 張景中, 平面幾何新路, 九章出版社, 1995年7月, p.213。
7. Howard Eves, “A Survey of Geometry”, Vol. 1.

—本文作者劉俊傑任教於國立西螺高級農工職業學校—