$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ 與 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ 值之探討

作者:張鴻偉・黃書恆

甘明濬・吳智善

指導:蔡東憲

一. 研究動機

高一下, 老師教複數的極式, 解 $x^n = 1$ 知其根爲 $1,\ w,\ w^2,\ldots,w^{n-1}$ $(w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$, 這些根在複數平面上所代表的點分別爲 $A_0,\ A_1,\ldots,A_{n-1}$。並且藉由計算知 $\overline{A_kA_0} = 2\sin\frac{k\pi}{n}$, 所以 $\overline{A_1A_0}+\overline{A_2A_0}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_0} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$, 我們可以由積與和差之轉換得知此答案爲 $2\cot\frac{\pi}{2n}$; 但是若將上述改爲 $\overline{A_1A_0}^m+\overline{A_2A_0}^m+\cdots+\overline{A_{n-1}A_0}^m = 2^m\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ $(m,\ n\in N,\ n>\frac{m}{2})$ 是否可得到較簡化的答案? $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ 是否也有令人驚喜的答案? 於是我們開始招兵買馬, 一同爲解決這個問題而奮鬥。

二. 研究目的

(1) 利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}$、$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}$ 的和及 $\sin^m\theta$ 的表式, 進而求出 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ 的和。

(2) 利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}$ 的和及 $\cos^m\theta$ 的表式, 進而求出 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$ 的和。

(3) 利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ 及 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{n}$ 的和, 求出 $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{j\pi}{n}$ 的和。

(4) 利用 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ 及 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{k\pi}{n}$ 的和, 求出 $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\cos\frac{i\pi}{n}\cos\frac{j\pi}{n}$ 的和。

三. 研究設備器材

紙、筆。

四. 預備知識

(1) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{-1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$。

(2) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$。

(3) 巴斯卡定理: $C_k^n+C_{k+1}^n=C_{k+1}^{n+1}$。

(4) $(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$。

(i) 令 $x=-1\Rightarrow C_0^n-C_1^n+C_2^n+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$,

$\because\ C_k^n=C_{n-k}^n$

$\therefore$ (a) 當 n 是偶數 $2C_0^n-2C_1^n+2C_2^n-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}}^n=0$。

(b) 當 n 是奇數 $C_0^n-C_1^n+C_2^n+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$。

(ii) 令 $x=1\Rightarrow C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$,

$\because\ C_k^n=C_{n-k}^n$

$\therefore$ (a) 當 n 是偶數 $\frac{C_{\frac{n}{2}}^n}{2}+C_{\frac{n-2}{2}}^n+C_{\frac{n-4}{2}}^n+\cdots+C_0^n=2^{n-1}$。

(b) 當 n 是奇數 $C_{\frac{n-1}{2}}^n+C_{\frac{n-3}{2}}^n+C_{\frac{n-5}{2}}^n+\cdots+C_0^n=2^{n-1}$。

(5) 當 m 是奇數時 $C_{\frac{m-1}{2}}^m=\frac{C_{\frac{m+1}{2}}^{m+1}}{2}$

$$\text{證明如下：左式}=\frac{m!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{m+1}{2}\right)!}$$

$$\begin{aligned}\text{右式}&=\frac{(m+1)!}{\left(\frac{m+1}{2}\right)!\left(\frac{m+1}{2}\right)!}\times\frac{1}{2}=\frac{m+1}{2\left(\frac{m+1}{2}\right)}\times\frac{m!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{m+1}{2}\right)!}\\&=\frac{m!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{m+1}{2}\right)!}\\&=\ \text{左式}\end{aligned}$$

五. 四個引理

爲求得 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$ 及 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}$, 我們必須先證明下面四個引理

(一) 引理一:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}=\begin{cases} n-1, & \text{當 } m \text{ 是 } 2n \text{ 倍數,}\\ -1, & \text{當 } m \text{ 非 } 2n \text{ 倍數且 } m \text{ 是偶數,}\\ 0, & \text{當 } m \text{ 是奇數。}\end{cases}\quad (m,\ n\in N \text{ 且 } n\geq 2)$$

證明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}$$
$$=\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{2m\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{m(n-1)\pi}{n}$$
$$=\frac{\sin\frac{3m\pi}{2n}-\sin\frac{m\pi}{2n}+\sin\frac{5m\pi}{2n}-\sin\frac{3m\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{(2mn-m)\pi}{2n}-\sin\frac{(2mn-3m)\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

(預備知識2)

$$=\frac{\sin\left(m-\frac{m}{2n}\right)\pi-\sin\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

藉由 m 的討論, 可得引理一。

(二) 引理二:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}=\begin{cases} 0, & \text{當 } m \text{ 是 } 2n \text{ 倍數,}\\ 0, & \text{當 } m \text{ 非 } 2n \text{ 倍數且 } m \text{ 是偶數,}\\ \cot\frac{m\pi}{2n}, & \text{當 } m \text{ 是奇數。}\end{cases}\quad (m,\ n\in N \text{ 且 } n\geq 2)$$

證明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}$$
$$=\sin\frac{m\pi}{n}+\sin\frac{2m\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}$$
$$=\frac{\cos\frac{3m\pi}{2n}-\cos\frac{m\pi}{2n}+\cos\frac{5m\pi}{2n}-\cos\frac{3m\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)m\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-3)m\pi}{2n}}{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

(預備知識1)

$$=\frac{\cos\left(m-\frac{m}{2n}\right)\pi-\cos\frac{m\pi}{2n}}{-2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

藉由 m 的討論, 可得引理二。

(三) 引理三:

$$\sin^m\theta=\begin{cases}\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}-C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos 2\theta+C^m_{\frac{m-4}{2}}\cos 4\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\cos m\theta\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{當 } m \text{ 是偶數,} \\ \frac{1}{2^{m-1}}\left(C^m_{\frac{m-1}{2}}\sin\theta-C^m_{\frac{m-3}{2}}\sin 3\theta+C^m_{\frac{m-5}{2}}\sin 5\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\sin m\theta\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{當 } m \text{ 是奇數。}\end{cases}$$

藉由觀察 $m=2,3,4$ 等, 我們可以猜測 $\sin^m\theta$ 之表示式, 接著, 證明我們的猜測是正確的。

(a) 當 m 是偶數時, 假設 $\sin^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}(\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}-C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos 2\theta+C^m_{\frac{m-4}{2}}\cos 4\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\cos m\theta)$ 成立, 則

$$\begin{aligned}\sin^{m+1}\theta&=\sin^m\theta\times\sin\theta\\&=\frac{1}{2^{m-1}}\Bigg[\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}\sin\theta-\frac{C^m_{\frac{m-2}{2}}}{2}(\sin 3\theta-\sin\theta)\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0}{2}[\sin(m+1)\theta-\sin(m-1)\theta]\Bigg]\\&=\frac{1}{2^m}[(C^m_{\frac{m}{2}}+C^m_{\frac{m-2}{2}})\sin\theta-(C^m_{\frac{m-2}{2}}+C^m_{\frac{m-4}{2}})\sin 3\theta\\&\quad+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\sin(m+1)\theta]\qquad\text{(預備知識3)}\\&=\frac{1}{2^m}[C^{m+1}_{\frac{m}{2}}\sin\theta-C^{m+1}_{\frac{m-2}{2}}\sin 3\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^{m+1}_0\sin(m+1)\theta]\end{aligned}$$

爲當初猜測 $m+1$ 爲奇數的情形。

(b) 當 m 是奇數時, 假設 $\sin^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}(C^m_{\frac{m-1}{2}}\sin\theta-C^m_{\frac{m-3}{2}}\sin 3\theta+C^m_{\frac{m-5}{2}}\sin 5\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\sin m\theta)$ 成立, 則

$$\begin{aligned}\sin^{m+1}\theta&=\sin^m\theta\times\sin\theta\\&=\frac{1}{2^{m-1}}\Bigg[C^m_{\frac{m-1}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}+C^m_{\frac{m-2}{2}}\times\frac{1}{2}(\cos 4\theta-\cos 2\theta)\\&\quad+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\times\frac{1}{2}C^m_0(\cos(m+1)\theta-\cos(m-1)\theta)\Bigg]\\&=\frac{1}{2^m}[C^m_{\frac{m-1}{2}}-(C^m_{\frac{m-1}{2}}+C^m_{\frac{m-3}{2}})\cos 2\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}C^m_0\cos(m+1)\theta]\\&=\frac{1}{2^m}[C^m_{\frac{m-1}{2}}-C^{m+1}_{\frac{m-1}{2}}\cos 2\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}C^m_0\cos(m+1)\theta]\end{aligned}$$

(預備知識5)

$$= \frac{1}{2^m}\left[\frac{C^{m+1}_{\frac{m+1}{2}}}{2} - C^{m+1}_{\frac{m-1}{2}}\cos 2\theta + \cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}}C^{m+1}_0\cos(m+1)\theta\right]$$

爲當初猜測 $m+1$ 爲偶數的情形。

所以我們完成引理三的證明。

(四) 引理四:

$$\cos^m\theta = \begin{cases} \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2} + C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos 2\theta + C^m_{\frac{m-4}{2}}\cos 4\theta + \cdots + C^m_0\cos m\theta\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{當 } m \text{ 是偶數}, \\ \frac{1}{2^{m-1}}\left(C^m_{\frac{m-1}{2}}\cos\theta + C^m_{\frac{m-3}{2}}\cos 3\theta + C^m_{\frac{m-5}{2}}\cos 5\theta + \cdots + C^m_0\cos m\theta\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{當 } m \text{ 是奇數。} \end{cases}$$

藉由觀察 $m=2,3,4$ 等, 我們可以猜測 $\cos^m\theta$ 之表示式, 接著, 證明我們的猜測是正確的。

(a) 當 m 是偶數時, 假設 $\cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}(\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2} + C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos 2\theta + \frac{C^m_{m-4}}{2}\cos 4\theta + \cdots + C^m_0\cos m\theta)$ 成立, 則

$$\cos^{m+1}\theta = \cos^m\theta\times\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}\cos\theta + \frac{C^m_{\frac{m-2}{2}}}{2}(\cos 3\theta + \cos\theta) + \cdots + \frac{C^m_0}{2}(\cos(m+1)\theta + \cos(m-1)\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}[(C^m_{\frac{m}{2}} + C^m_{\frac{m-2}{2}})\cos\theta + (C^m_{\frac{m-2}{2}} + C^m_{\frac{m-4}{2}})\cos 3\theta + \cdots + C^m_0\cos(m+1)\theta] (\text{預備知識}3)$$

$$= \frac{1}{2^m}[C^{m+1}_{\frac{m}{2}}\cos\theta + C^{m+1}_{\frac{m-2}{2}}\cos 3\theta + \cdots + C^{m+1}_0\cos(m+1)\theta].$$

爲當初猜測 $m+1$ 是奇數的情形。

(b) 當 m 是奇數, 假設 $\cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}(C^m_{\frac{m-1}{2}}\cos\theta + C^m_{\frac{m-3}{2}}\cos 3\theta + C^m_{\frac{m-5}{2}}\cos 5\theta + \cdots + C^m_0\cos m\theta)$ 成立, 則

$$\cos^{m+1}\theta = \cos^m\theta\times\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{C^m_{\frac{m-1}{2}}}{2}(1+\cos 2\theta) + \cdots + \frac{C^m_0}{2}(\cos(m+1)\theta + \cos(m-1)\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}[(C^m_{\frac{m-1}{2}} + (C^m_{\frac{m-1}{2}} + C^m_{\frac{m-3}{2}})\cos 2\theta + \cdots + C^m_0\cos(m+1)\theta]$$

(預備知識5)

$$=\frac{1}{2^m}\left[\frac{C^{m+1}_{\frac{m+1}{2}}}{2}+C^{m+1}_{\frac{m-1}{2}}\cos 2\theta+\cdots+C^{m+1}_0\cos(m+1)\theta\right]$$

爲當初猜測 $m+1$ 是偶數的情形。

所以我們完成引理四的證明。

六. 主要研究內容

(一) 定理一:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}$$
$$=\begin{cases}\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n, & \text{當 } m \text{ 是偶數且 } n>\frac{m}{2},\\ \frac{1}{2^{m-1}}\left(C^m_{\frac{m-1}{2}}\cot\frac{\pi}{2n}-C^m_{\frac{m-3}{2}}\cot\frac{3\pi}{2n}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\cot\frac{m\pi}{2n}\right), & \\ & \text{當 } m \text{ 是奇數},\end{cases}$$

$(m,n\in N, n\geq 2)$。

(i) 當 m 是偶數且 $n>\frac{m}{2}$ 時

$$\because\ \sin^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}-C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos 2\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0\cos m\theta\right)\quad(\text{引理三})$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}(n-1)-C^m_{\frac{m-2}{2}}(-1)+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}C^m_0(-1)\right]\quad(\text{引理一})$$

$$=\frac{1}{2^m}[C^m_{\frac{m}{2}}\cdot n-(C^m_{\frac{m}{2}}-2C^m_{\frac{m-2}{2}}+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2\cdot C^m_0)]$$

$$=\frac{1}{2^m}\cdot C^m_{\frac{m}{2}}\cdot n$$

(由預備知識 (4)(i) 知 $C^m_{\frac{m}{2}}-2C^m_{\frac{m-2}{2}}+\cdots+(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2\cdot C^m_0=0$)。

(ii) 當 m 是奇數時

$$\because\ \sin^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}\left[C^m_{\frac{m-1}{2}}\sin\theta-C^m_{\frac{m-3}{2}}\sin 3\theta+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\sin m\theta\right]\quad(\text{引理三})$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[C^m_{\frac{m-1}{2}}\cot\frac{\pi}{2n}-C^m_{\frac{m-3}{2}}\cot\frac{3\pi}{2n}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\cot\frac{m\pi}{2n}\right]\ (\text{引理二})$$

於是我們完成定理1的證明。

(二) 定理二:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}=\begin{cases}\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n-1, & \text{當 } m \text{ 是偶數且 } n>\frac{m}{2},\\ 0, & \text{當 } m \text{ 是奇數},\end{cases}\quad (m,n\in N, n\geq 2)。$$

(i) 當 m 是偶數且 $n>\frac{m}{2}$ 時

$$\because \cos^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2}+C^m_{\frac{m-2}{2}}\cos 2\theta+\cdots+C^m_0\cos m\theta\right)\quad (\text{引理四})$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}&=\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}(n-1)+\frac{1}{2^{m-1}}C^m_{\frac{m-2}{2}}(-1)+\cdots+\frac{C^m_0}{2^{m-1}}(-1)\quad (\text{引理一})\\ &=\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n-\frac{1}{2^m}(C^m_{\frac{m}{2}}+2C^m_{\frac{m-2}{2}}+\cdots+2C^m_0)\\ &=\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n-1\end{aligned}$$

(由預備知識 (4)(ii) 知 $C^m_{\frac{m}{2}}+2C^m_{\frac{m-2}{2}}+\cdots+2C^m_0=2^m$)

(ii) 當 m 是奇數時

$$\because \cos^m\theta=\frac{1}{2^{m-1}}(C^m_{\frac{m-1}{2}}\cos\theta+C^m_{\frac{m-3}{2}}\cos 3\theta+\cdots+C^m_0\cos m\theta),\quad (\text{引理四})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}=\frac{0}{2^{m-1}}=0\quad (\text{引理一})$$

於是我們完成定理二證明。

七. 結論及應用

(1) 藉由四個引理的輔助, 我們證明下列:

$$\text{(i)}\sum_{k=1}^{n-1}\sin^m\frac{k\pi}{n}=\begin{cases}\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n, & \text{當 } m \text{ 是偶數且 } n>\frac{m}{2},\\ \frac{1}{2^{m-1}}(C^m_{\frac{m-1}{2}}\cot\frac{\pi}{2n}-C^m_{\frac{m-3}{2}}\cot\frac{3\pi}{2n}+\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}C^m_0\cot\frac{m\pi}{2n}), & \\ & \text{當 } m \text{ 是奇數},\end{cases}$$

$(m,n\in N,n\geq 2)$。

$$\text{(ii)}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^m\frac{k\pi}{n}=\begin{cases}\frac{C^m_{\frac{m}{2}}}{2^m}n-1, & \text{當 } m \text{ 是偶數且 } n>\frac{m}{2},\\ 0, & \text{當 } m \text{ 是奇數},\end{cases}\quad (m,n\in N, n\geq 2)。$$

(2) 因爲 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})^2 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} a_i a_j$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} \sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{j\pi}{n} = \frac{1}{2}(\cot^2\frac{\pi}{2n} - \frac{n}{2})$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} \cos\frac{i\pi}{n}\cos\frac{j\pi}{n} = \frac{-1}{2}(\frac{n}{2} - 1) = \frac{-n}{4} + \frac{1}{2}$$

八. 參考資料

1. 林福來等著「高中數學第二、四册」, 南一出版社。

—本文作者就讀於台南一中, 蔡東憲任教於台南一中—