從連續整數冪次和公式引發之擴充想法

蘇益弘 · 胡豐榮 · 許天維

一. 引言

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 這個連續整數冪次和公式, 該算是無人不曉的吧, 我們大家大概都做過下面的習題。用數學歸納法證明:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

可能你也曾懷疑過: 這些公式, 果眞是先從實驗猜測得來的嗎 ([1])? 關於數學歸納法以外的證明方法, 陳國裕 (民 88) 提出了下列七種證明方法: 級數的前幾項和來猜測、分項對消分數約分、分項對消的減法、倒過來寫相加、堆疊與體積的觀念、單純堆疊的方法、與利用公式解 ([2])。這些證明方法, 運用數列從特殊項推測到一般項、數列的分項, 以及倒過來寫相加等技巧。同時, 還運用了函數、堆疊與體積的觀念, 體現出諸多創新思想。隨後, 傅海倫 (民 89) 從數學構造法對 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 再提出了下列五種證明方法: 正方形塊的構造、數碼三角形的構造、列表歸納推求一般式、方錐果垛法、方棱果垛法 ([3])。這些證法極容易理解且不複雜, 可以是說有中生新之作法。

然而, 一般性的探討 $1^k+2^k+\cdots+n^k$, $k\geq 3$ 之連續整數冪次和, 似乎不像 $k=2$ 這麼容易可以給出有中生新的簡易證明法, 例如 $k=3$ 的部份, 何景國 (民 71) 提出組成構造法、和分法、組合法就不是這麼直觀易懂 ([4)]。李政豐 (民 91) 雖企圖以簡易法來推導連續整數冪次和之公式, 但僅止於 $3\leq k\leq 20$ ([5])。可見 $k\geq 2$ 時之連續整數冪次和公式的另類思考, 變得極其複雜。

其實不論什麼 k, $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的公式, 都不難逐步地找出來。我們只要利用二項式定理:

$$(j+1)^{k+1}=j^{k+1}+C_1^{k+1}j^k+\cdots+C_k^{k+1}j+1.$$

把上式自 $j=1$ 加到 $j=n$, 經過消縮, 便得到:

$$(n+1)^{k+1}-1=(k+1)S_k(n)+C_1^{k+1}S_{k-1}(n)+\cdots+C_k^{k+1}S_1(n)+n. \qquad (1)$$

因此如果你已經知道 $S_1(n), S_2(n), \cdots, S_{k-1}(n)$ 的公式, 你就可以利用上式得到 $S_k(n)$ 的一般解如下:

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{k}{2}B_2n^{k-1}+\frac{k(k-1)(k-2)}{2\times3\times4}B_4n^{k-3}+\cdots, \tag{2}$$

其中 $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=-\frac{1}{30}$, $\cdots$。上面這些 B_i 叫做伯努利數 ([1])。

根據 $S_k(n)$ 的一般公式, 當我們計算出某個 $S_{\widehat{k}}(n)$ 之值後, 能否在不計算伯努利數之前提下, 迅速給出 $S_{\widehat{k}+1}(n)$ 之值呢 ? 基於此, 本文企圖給出一個視覺上簡潔之 $S_k(n)$ 公式, 並藉此回答上述問題, 以作爲 $S_k(n)$ 公式之有中生新之證明法。

二. $S_k(n)$ 公式之擴充想法

爲了探討上述問題, 在 k 固定的條件下, 我們將 $S_k(\cdot)$ 看成一個由自然數 $\mathbb{N}$ 映到自然數 $\mathbb{N}$ 的函數。現在拋開連續整數冪次和的觀點, 純粹根據公式 (1), 我們可以擴充函數 $S_k(\cdot)$ 之定義域到 $\mathbb{R}$, 定義法如下:

$$S_k(x)=\frac{1}{k+1}\Big\{(x+1)^{k+1}-C_2^{k+1}S_{k-1}(x)-\cdots-C_k^{k+1}S_1(x)-x-1\Big\}, \tag{3}$$

$$S_1(x)=\frac{x(x+1)}{2}.$$

根據這樣的擴充想法, 我們很容易可以得到

$$S_2(x)=\frac{1}{2+1}\Big\{(x+1)^{2+1}-C_2^3S_1(x)-x-1\Big\}=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

同理得到 $S_3(x)=\frac{x^2(x+1)^2}{4}$。

三. 函數 $S_k(x)$ 的性質

根據 $S_k(x)$ 之定義, 我們推導出下面兩個重要性質:

性質 3.1. 對任意大於等於 3 之奇數 k, $\frac{d}{dx}S_k(x)=kS_{k-1}(x)$ 恆成立。

證明:我們利用數學歸納法來證明這個性質, 首先檢視 $k=3$ 時, 我們發現

$$\frac{d}{dx}S_3(x)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{2}=3S_2(x).$$

令 k 爲大於 3 之正奇數, 現在假設對任意大於 3 小於 k 之奇數 p, $\frac{d}{dx}S_p(x)=pS_{p-1}(x)$ 恆成立。因爲

$$(j-1)^{k+1}=j^{k+1}+(-1)C_1^{k+1}j^k+\cdots+(-1)^kC_k^{k+1}j+(-1)^{k+1},$$

所以把上式自 $j=1$ 加到 $j=n$, 經過消縮, 便得到:

$$n^{k+1}=C_1^{k+1}S_k(n)+(-1)C_2^{k+1}S_{k-1}(n)+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k+1}S_1(n)+(-1)^kn.$$

這給出

$$S_k(x)=\frac{1}{k+1}\left\{x^{k+1}+(-1)^2C_2^{k+1}S_{k-1}(x)+\cdots+(-1)^kC_k^{k+1}S_1(x)+(-1)^{k+1}x\right\}. \quad (4)$$

將公式 (3) 與 (4) 相加可得

$$2S_k(x)=\frac{1}{k+1}\Big\{(x+1)^{k+1}+x^{k+1}-2C_3^{k+1}S_{k-2}(x)-\cdots-2C_{k-2}^{k+1}S_3(x)-2C_k^{k+1}S_1(x)-1\Big\}.$$

對上式之兩邊微分, 再根據歸納法的假設可得

$$2S_k'(x)=(x+1)^k+x^k-2C_3^kS_{k-3}(x)-\cdots-2C_{k-2}^kS_2(x)-2x-1. \quad (5)$$

另一方面, 於公式 (3) 與公式 (4) 中, 將 k 換成 $k-1$ 後, 兩式再相加可得

$$2kS_{k-1}=(x+1)^k+x^k-2C_3^kS_{k-3}(x)-\cdots-2C_{k-2}^kS_2(x)-2x-1. \quad (6)$$

比較公式 (5) 與公式 (6) 後可得證本性質。

性質 3.2. 對任意大於等於 2 之正整數 k, $\frac{d^2}{dx^2}S_k(x)=k\frac{d}{dx}S_{k-1}(x)$ 恆成立。

證明:根據性質 3.1, 所以欲證明本性質, 僅需證明「對任意大於等於 2 之偶數 k, $\frac{d^2}{dx^2}S_k(x)=k\frac{d}{dx}S_{k-1}(x)$ 恆成立」 即可。然此事實可藉由數學歸納法來證明, 證明手法類似性質 3.1, 故不冗述。

四. 結語

綜合性質 3.1 和性質 3.2, 我們可以推導出

$$\begin{aligned}S_k(x)&=\int_0^x\int_0^y kS_{k-1}'(u)dudy+xS_k'(0)+S_k(0)\\&=k\int_0^x S_{k-1}(y)dy+xS_k'(0).\end{aligned}$$

所以只要知道 $S_{k-1}(u), 0\le u\le x$ 和 $S_k'(0)$ 之值, 透過積分就可以求出 $S_k(x)$。特別是當 k 爲大於等於 3 之奇數時, 可得

$$S_k(x)=k\int_0^x S_{k-1}(y)dy. \quad (7)$$

由此可見, 若根據公式 (2) 計算出 $S_k(x)$ (k 爲偶數) 時, 則根據公式 (7) 馬上可以得出 $S_{k+1}(n)$。例如:

$$S_6(x)=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x,$$

因此

$$\begin{aligned} S_7(n)&=7\int_0^n S_6(y)dy\\ &=7\left\{\frac{1}{56}n^8+\frac{1}{14}n^7+\frac{1}{12}n^6-\frac{1}{24}n^4+\frac{1}{84}n^2\right\}\\ &=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2. \end{aligned}$$

本文以積分的觀點, 給出 $S_k(n)$ 之表示法, 亦可視爲是連續整數冪次和公式之另類證明, 而此另類思考與陳國裕 (民 88)、傅海倫 (民 89)、李正豐 (民 91) 三人對 $S_k(n)$ 所提之諸多證明法, 是否有異曲同工之妙呢？

参考文獻

1. 李宗元 (民 68)。閒話 $1^k+2^k+\cdots+n^k$。數學傳播, 第二卷第四期, 頁 12-14。
2. 陳國裕 (民 88)。如何求出 $1^2+2^2+\cdots+n^2$。數學傳播, 第二十三卷第一期, 頁 76-84。
3. 傅海倫 (民 89)。再談如何求出 $1^2+2^2+\cdots+n^2$。數學傳播, 第二十四卷第二期, 頁 62-64。
4. 何景國 (民 71)。求 $\sum_{i=1}^n i^k$ $(k=1,2,3)$ 的幾種方法。數學傳播, 第六卷第四期, 頁 93-97。
5. 李政豐 (民 91)。連續整數冪次和公式的另類思考。數學傳播, 第二十六卷第二期, 頁 93-82。

—本文第一作者爲數學教育系碩士班研究生、第二作者現任教於數學教育系、第三作者現任教於教育測驗統計研究所—