未解決的構圖問題
——給學生的一個介紹

曾健威

一. 引言

在寫本文時, 筆者正任教一幾何課。在收集該課程的資料期間, 筆者從 Arthur Baragar 教授的個人網頁 (參見 [1]) 中認識到一些既漂亮且易明的構圖幾何。在 Baragar 教授和他之前的學生 Patrick Hummel 先生同意下, 筆者把他們部分研究成果翻譯成中文, 並收錄在本文內。翻譯的目的是爲了讓更多人 (尤其是中國人) 認識到他們的漂亮成果。本文另外的一個目的是鼓勵數學教師利用未解決的數學問題 (open questions) 去啓發學生對數學研究的興趣。

二. 何謂未解決的問題?

嚴格來說, 一個未解決的數學問題是指一個自古到今沒有人能夠給出正確及完滿答案的問題。然而, 有些數學問題雖已被解決, 但由於解決者沒有公開發表他們的解決方法 (德國數學家高斯 (Gauss) 就是一個典型例子) , 所以對大衆來說, 這些問題仍然是未解決的數學問題。因此, 普遍來說, 一個未解決的數學問題是指一個還沒有公開解決的問題。

三. 構圖問題

二千年之前, 希臘人嘗試只用規 (compass) 和沒有刻度的尺 (straightedge) 去構作不同的幾何圖, 如角度、長度、正多邊形等。希臘人發現有一些圖 (例如: 長度 $\sqrt[3]{2}$ 或者角度 $20^\circ = \frac{60^\circ}{3}$) 不能只用規尺構作出來, 他們其後把幾何構圖的問題分爲平面 (plane)、立體 (solid) 和線性 (linear) 三類: 一個可以只用規尺解決的問題稱爲平面問題; 一個可用一個或多個圓錐曲線 (conic section) 加上規尺解決的問題稱爲立體問題; 一個要用比較複雜的線加上規尺去解決的問題稱爲線性問題。

坊間已有很多關於平面構圖問題的書籍 (參見 [2])。在本文中, 我們將會討論立體構圖問題 (第四節) 和二刻尺構圖問題 (第五節)。

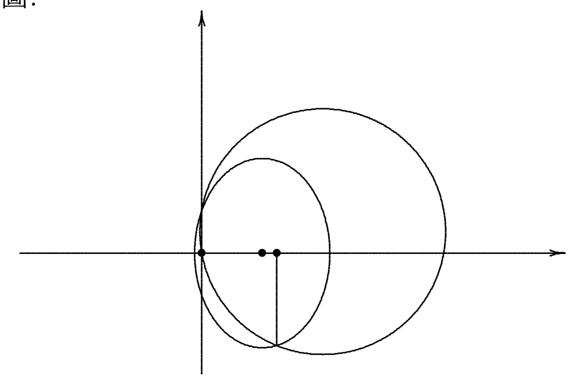
四. 立體構圖問題 — 複製正立方體

當 Hummel 唸中學時, 他請 Baragar 給他一個數學研究題目, 當時 Baragar 給了他一個有關立體構圖的研究題目。結果, Hummel 的研究論文得到2003年度 Richard V. Andree 大獎。本節是 Hummel 的研究成果。

定理1 (Hummel [4, Theorem 1]): 設長度 l 爲一個可平面構作的長度, 則長度 l 的三次方根 ($\sqrt[3]{l}$) 是可立體構作的。事實上, 長度 $\sqrt[3]{l}$ 是可用單一個橢圓形和規尺構作出來。

證明: 考慮橢圓形 $2(x-1)^2+y^2=2+\frac{l}{4}$ 和圓形 $(x-2)^2+(y-\frac{\sqrt{l}}{4})^2=4+\frac{l}{16}$。從橢圓形的公式可得 $y=\pm\sqrt{\frac{l}{4}-2(x^2-2x)}$。另外, 從圓形的公式, 可得 $x^2-4x+y^2-\frac{\sqrt{l}}{2}y=0$。把橢圓形的 $y-$坐標等式代入圓形的公式中, 可知它們的交點的 $x-$坐標符合 $-x^2+\frac{l}{4}=\pm\frac{\sqrt{l}}{2}\sqrt{\frac{l}{4}-2(x^2-2x)}$。把該等式平方可得 $x^4=lx$, 所以它們的兩個交點的 $x-$坐標分別爲 $x=\sqrt[3]{l}$ 和 $x=0$。

以上 Hummel 的定理爲一個源自古希臘的構圖問題提供了一個漂亮的答案。這個古老問題就是複製正立方體的問題: 構作一個正立方體, 使它的體積是另一個已有正立方體的體積的兩倍。參見下圖:



圖中的橢圓形爲 $2(x-1)^2+y^2=\frac{5}{2}$, 圓形爲 $(x-2)^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{4})^2=\frac{33}{8}$。圓形與橢圓形在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 相交。可驗證它們另外的一個交點的 x 坐標爲 $\sqrt[3]{2}$。

定理2 (Hummel [4, Theorem 2]): 設角度 α 爲一個可平面構作的角度, 則角度 α 的三分之一 ($\frac{\alpha}{3}$) 是可用單一個橢圓形和規尺構作出來。

證明: 只需要證明當 α 爲銳角。考慮橢圓形 $2(x-1)^2+y^2=2+(\frac{3}{\sqrt{2\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{\cos\alpha}{2}})^2$ 和圓形 $(x-2)^2+(y-\sqrt{\frac{\cos\alpha}{8}})^2=4+(\frac{3}{\sqrt{2\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{\cos\alpha}{8}})^2$。用定理1的證明中的方法可知它

們的兩個相交點的 $x-$坐標符合 $x^3-2x=2\cos\alpha$ 或 $x=0$, 所以它們的兩個相交點的 $x-$坐標分別爲 $x=2\cos(\frac{\alpha}{3})$ 和 $x=0$。

筆者建議讀者參考 Hummel 的原文, 因爲原文中的證明包含了他的思路, 而以上只是把他的證明簡化了。

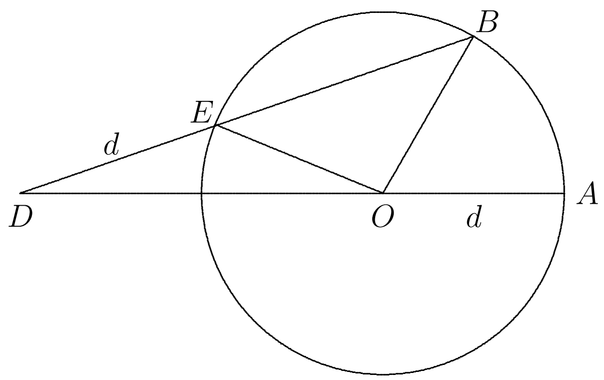
以下的定理更說明所有立體構圖問題都可以用橢圓形加上規尺去解決。

定理3 (Hummel [4, Theorem 3]): 所有可立體構作的點都可以用橢圓形加上規尺構作出來。

五. 二刻尺構圖和未解決的問題

除了在第三節提到的角三分法外, 我們也有以下構作方法:

阿基米德的角三分法 — 對於任意角, 我們可以用規和有兩個刻度的尺 (二刻尺, twice-notched straightedge) 去把該角平分三份。下圖說明阿基米德角三分法:



長度 d 爲二刻尺的兩個刻度中間的距離。用圓規畫一個以 d 爲半徑及 O 爲圓心的圓。設角 $\angle BOA$ 爲將被分成三份的角。利用二刻尺去畫一直線 BE, 使它與直線 AO 相交於 D 點及線段 $\overline{ED}$ 的長度等於 d。由於三角形 $\triangle DEO$ 是等腰三角形, 可得 $\angle EDO=\angle EOD$; 而 $\angle OEB=\angle EDO+\angle EOD=2\angle EOD$ (三角形的外角)。由於三角形 $\triangle EOB$ 是等腰三角形, 可得 $\angle OBE=\angle OEB=2\angle EOD$。最後得到 $\angle BOA=\angle EOD+\angle OBE=3\angle EOD$ (三角形的外角), 所以 $\angle EOD$ 是 $\angle BOA$ 的三分之一。

Baragar 教授在他的文章 ([3]) 中, 提出了其他二刻尺的構圖方法和二刻尺構圖方法的限制。其中包括:

定理4 ([3, Theorem 4.1]): 設長度 l 為一個可平面構作的長度, 則長度 l 的三次方根 ($\sqrt[3]{l}$) 是可以用規和二刻尺構作出來。

定理5 ([3, Theorem 4.2]): 所有可立體構作的點都可以用規和二刻尺構作出來。

定理6 (Baragar [3, Corollary 5.2]): 正23邊形和正29邊形不可以用規和二刻尺構作出來。

有興趣的讀者可參考 Baragar 文章 [3] 的證明。另外, Baragar 教授在該文章中提出了幾個未解決的二刻尺構圖問題, 當中包括以下三題:

1. 可否用規和二刻尺構作正11、25、41或61邊形?
2. 怎樣的六次多項式可用規和二刻尺去解?
3. 已知可用規和二刻尺去構作正七邊形 (參見 [3])。試找出該構作。

筆者認為這些問題應該可用高中或大學本科數學技巧去解決, 希望學生們嘗試去解答它們。

六. 結論

未解決的數學問題不局限於構圖問題。學生和老師們可以透過不同的途徑去發掘更多不同的未解決的數學問題。這些途徑包括利用互聯網搜查器去搜查、讀一些新發表的數學文章、把一些已有的數學理論改一改去發明自己的問題等等。最後, 筆者希望學生們能夠透過解決未解決的數學問題去培養對數學研究的興趣, 亦希望日後寫更多關於未解決的數學問題的文章。

參考文獻

1. http://www.nevada.edu/~baragar/
2. A. Baragar, A Survey of Classical and Modern Geometries: with Computer Activities, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001, xiv, 370.
3. A. Baragar, Constructions using a compass and twice-notched straightedge, Amer. Math. Monthly, 109 (2), 151-164 (2002).
4. P. Hummel, Solid constructions using ellipses, The IIME Journal, 11(8), 429-435 (2003).

—本文作者任教於香港教育學院數學系—