軌跡問題誤解多

張國男

盡信書, 則不如無書。——— 《孟子·盡心下》

數年前, 筆者審核中國某學人投寄台灣中央研究院數學研究所《數學傳播季刊》之稿件, 於查閱相關資料時, 意外發現: 台海兩岸三地印行之若干中文版數學書籍, 其中所示軌跡問題之解法, 多有錯誤之處。茲特撰此短篇, 提供有關之編、審、閱者及師、生等參考之, 俾免謬種流傳、積非成是。

本篇含例一～六及問題1～18。其中例一及例二皆先紹介某書之謬解, 而後指出其錯誤所在; 例三將正、誤解法並陳, 以資對照; 其餘三例則俱逕示正確之解答。問題1～18難易兼備, 係供有志讀者研習之用, 請盡力求解。

例一: 橢圓之二切線, 若互相垂直相交, 則其交點之軌跡若何?

某書提供之解答, 如下所示。其推導是否正確? 試討論之。

> 設橢圓之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,
> 又設此二切線之斜率爲 m 及 $-\frac{1}{m}$, 則得其方程式爲
> $$mx-y=-\sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad \cdots\cdots ①$$
> 與 $$x+my=\sqrt{a^2+b^2m^2}。\quad \cdots\cdots ②$$
> $①^2+②^2$ 得 $(mx-y)^2+(x+my)^2=(a^2m^2+b^2)+(a^2+b^2m^2)$,
> 即 $$(m^2+1)x^2+(m^2+1)y^2=(a^2+b^2)(m^2+1),$$
> 故 $$x^2+y^2=a^2+b^2(\because m^2+1\neq 0),$$
> 即其軌跡爲一圓, 其中心在原點, 半徑爲 $\sqrt{a^2+b^2}$。

討論: (1) 若橢圓之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 則斜率爲 m 之切線共有二條, 其方程式分別爲 $mx-y=\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 及 $mx-y=-\sqrt{a^2m^2+b^2}$; 斜率爲 $-\frac{1}{m}$ 之切線亦有二條, 其方程式分別爲 $x+my=\sqrt{a^2+b^2m^2}$ 及 $x+my=-\sqrt{a^2+b^2m^2}$。

前示某書所提供之解答, 遺漏斜率爲 m 及 $-\frac{1}{m}$ 之切線各一條! 其推導可修正如下:

設橢圓 Γ 之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

若過點 $P_0(x_0,y_0)$ 所作 Γ 之二條切線之斜率爲 m 及 $-\frac{1}{m}$,

則有
$$mx_0-y_0=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$
$$x_0+my_0=\pm\sqrt{a^2+b^2m^2},$$
故
$$(mx_0-y_0)^2+(x_0+my_0)^2=(a^2m^2+b^2)+(a^2+b^2m^2),$$
即
$$(m^2+1)(x_0^2+y_0^2)=(a^2+b^2)(m^2+1),$$

亦即 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$,

遂知 P_0 必在方程式 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 所表之圖形 C [爲圓] 上。

(2) 若過點 $P_0(x_0,y_0)$ 所作 Γ 之二條切線分別爲橫向切線及縱向切線, 則有 $x_0=\pm a$, $y_0=\pm b$。由此, 即知 P_0 必在圓 C 上。

讀者應注意: 因橫向切線之斜率爲 $m=0$, 而縱向切線無斜率, 故不宜假設此二條正交切線之斜率爲 m 及 $-\frac{1}{m}$。

(3) 前示某書所提供之解答未證明由圓 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上之點所作橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之二條切線必互相垂直, 此爲其最嚴重之缺失。

備註: 上述之 C 稱爲 Γ 之準圓 (director circle)。

問題1: 若由拋物線 $x^2=4py$ 動弦二端點所作二切線互相垂直, (i) 試求此二切線交點之軌跡, (ii) 試求此動弦中點之軌跡。

問題2: 若由橢圓 (或圓) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 動弦二端點所作二切線互相垂直, (i) 試求此二切線交點之軌跡, (ii) 試求此動弦中點之軌跡。

問題3: 若由雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 動弦二端點所作二切線互相垂直, (i) 試求此二切線交點之軌跡, (ii) 試求此動弦中點之軌跡。

例二: 試求錐線所有焦弦之中點所構成之圖形。

某書提供之解答, 如下所示。其推導是否正確? 試討論之。

設錐線之極方程式爲 $r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$, ... ①
S 爲極, 任一焦弦爲 PSQ, 並命 P 及 Q 之矢角爲 θ 及 $\pi+\theta$,
則 $SP=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$, $SQ=\frac{ep}{1-e\cos(\pi+\theta)}=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$。
命 PQ 之中點 R 之極坐標爲 (r,θ),
則 $r=SP-RP=SP-\frac{1}{2}(SP+SQ)=\frac{1}{2}(SP-SQ)$
$=\frac{ep}{2}(\frac{1}{1-e\cos\theta}-\frac{1}{1+e\cos\theta})=\frac{e^2p\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$,
即 $r-e^2r\cos^2\theta=e^2p\cos\theta$。
以 r 乘二邊, 並將其化爲直角坐標, 得
$$x^2+y^2-e^2x^2=e^2px,$$
或 $(1-e^2)x^2+y^2=e^2px$。 .... ②
若 $e=1$, 則 ②式爲 $y^2=px$ 表一拋物線; $e<1$ 時表橢圓; $e>1$ 時表雙曲線。

討論: 設錐線 Γ 之極方程式爲 $r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$, 其中 p 及離心率 e 皆爲正數, 並設 S 爲極。

(1) 若過 S 之直線 L 交 Γ 於 P_1 及 P_2 二點, 因 $1-e\cos(\theta+\pi)=1+e\cos\theta$, 不妨假設 P_1 及 P_2 之極坐標爲 (r_1,θ_0) 及 (r_2,θ_0), 其中 $r_1=\frac{ep}{1-e\cos\theta_0}$, $r_2=-\frac{ep}{1+e\cos\theta_0}$, 如是則弦 P_1P_2 之中點 M 之極坐標即爲 (r_0,θ_0), 其中 $r_0=\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{ep}{2}(\frac{1}{1-e\cos\theta_0}-\frac{1}{1+e\cos\theta_0})=\frac{e^2p\cos\theta_0}{1-e^2\cos\theta_0}$, 故 M 必在極方程式 $r=\frac{e^2p\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$ 所表之圖形 Ψ 上。

反之, 若 $M(r_0,\theta_0)$ 爲 Ψ 上任一點, 其中 $r_0=\frac{e^2p\cos\theta_0}{1-e^2\cos^2\theta_0}$, 令 $r_1=\frac{ep}{1-e\cos\theta_0}$, $r_2=-\frac{ep}{1+e\cos\theta_0}$, 則參考前段, 並注意 r_1, r_2 及 0 三數全異, 即知 (i) $P_1(r_1,\theta_0)$, $P_2(r_2,\theta_0)\in\Gamma$, (ii) P_1, P_2 及 S 三點全異且共線, (iii) M 爲弦 P_1P_2 之中點。

合之, 證得: *所在直線過極 S 之所有弦之中點所構成之圖形爲 Ψ, 其極方程式爲 $r=\frac{e^2p\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$*, 即 $r(1-e^2\cos^2\theta)=e^2p\cos\theta$。[前後二式相當。何故?]

據上, 注意極 S 在 Ψ 上, 易知 Ψ 亦可以極方程式
$$r^2(1-e^2\cos^2\theta)=e^2pr\cos\theta \qquad (*)$$
表之。

將 $(*)$ 中之極坐標轉換爲直角坐標, 即得 Ψ 之直角坐標方程式 $(1-e^2)x^2+y^2=e^2px$。

當 $e=1$ 時, 上式化爲 $y^2=px$, 表一拋物線; 當 $0<e<1$ 時, 上式表一橢圓; 當 $e>1$ 時, 上式表一雙曲線, 其二頂點之直角坐標爲 $(-\frac{e^2p}{e^2-1},0)$ 及 (0,0)。

以下, 設 P_1, P_2 及 M 之極坐標俱如上所示。

(2) 當 $e=1$ 時, Γ 爲拋物線, S 爲其焦點。此時 $r_1r_2<0$, 故弦 P_1P_2 含焦點 S, 即 P_1P_2 必爲焦弦。據 (1) 所得, 可知 Γ 之所有焦弦之中點所構成之圖形 Ψ 爲拋物線, 其極方程式爲 $r=\frac{p\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$, 直角坐標方程式爲 $y^2=px$。

前示某書所提供之解答, 勉強可謂大體無誤, 但其推導不若 (1) 之嚴謹、清晰。

(3) 當 $0 < e < 1$ 時, Γ 爲橢圓, 有二焦點, S 僅爲其一耳 (S 在橢圓中心之左方)。此時 $r_1r_2 < 0$, 故弦 P_1P_2 含焦點 S, 即 P_1P_2 必爲焦弦。據 (1) 所得, 可知 Γ 之所有左焦弦 (即含左焦點 S 之弦) 之中點所構成之圖形 Ψ 爲橢圓, 其極方程式爲 $r = \frac{e^2p\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$, 直角坐標方程式爲 $(1-e^2)x^2 + y^2 = e^2px$。

前示某書所提供之解答, 未考慮 Γ 之所有右焦弦 (即含右焦點之弦) 之中點所構成之圖形!

(4) 當 $e > 1$ 時, Γ 爲雙曲線, 有二焦點, S 僅爲其一耳 (S 在雙曲線中心之右方)。

據 (1), 可得: P_1P_2 爲 Γ 之右焦弦 (即含右焦點 S 之弦)$\Leftrightarrow r_1r_2 < 0 \Leftrightarrow 1-e^2\cos^2\theta_0 > 0$。

由上及 Ψ 之極方程式 $(*)$, 可知 Γ 之右焦弦 P_1P_2 之中點 M 之 x 坐標必非負, 故 M 必在雙曲線 Ψ 之右支 (即 Ψ 含極 S 之分支) 上。

反之, 若 M 爲 Ψ 之右支上一點, 且 $M \neq S$, 則由 M 之 x 坐標 $r_0\cos\theta_0 > 0$ 及 Ψ 之極方程式 $(*)$, 可得 $1-e^2\cos^2\theta_0 > 0$, 故 M 爲 Γ *之右焦弦* P_1P_2 之中點。顯然, S 爲 Γ 之右正焦弦 (即過 S 之正焦弦) 之中點。

合之, 證得: Γ 之所有右焦弦之中點所構成之圖形即爲雙曲線 Ψ 之右支。

前示某書所提供之解答, 有二重大錯誤: 其一, 未排除 Ψ 之左支 [即 Ψ 含直角坐標爲 $(-\frac{e^2p}{e^2-1}, 0)$ 之頂點之分支]; 其二, 未考慮 Γ 之所有左焦弦 (即含左焦點之弦) 之中點所構成之圖形。

備註: 設 $\prod$ 爲一定平面。以下, 爲方便計, 將 $\prod$ 上之點 P_1 與 P_2 之距離, 以 P_1P_2 表之。茲考慮下述問題 (其中所有點皆限定在 $\prod$ 上): 若定點 F_c 與 F'_c 之距離爲 $2c$, 而 a 爲大於 c 之一定數, 試求合乎條件 $PF_c + PF'_c = 2a$ 之點 P 所構成之圖形。衆所周知: (i) 當 $c > 0$ 時, $F_c \neq F'_c$, 合乎題述條件之點 P 所構成之圖形 Γ_c 爲一橢圓, 其焦點爲 F_c 及 F'_c, 其長軸之長爲 $2a$。(ii) 當 $c = 0$ 時, $F_0 = F'_0$, 題述條件化爲 $PF_0 = a$, 合乎此條件之點 P 所構成之圖形 Γ_0 爲一圓, 其中心爲 $F_0 = F'_0$, 其直徑之長爲 $2a$。因橢圓 Γ_c 之焦點 F_c 及 F'_c 之光學性質, 圓 Γ_0 之中心 $F_0 = F'_0$ 亦具備, 故 $F_0 = F'_0$ 可稱爲圓 Γ_0 之焦點。[Γ_0 別無其他焦點。何故?] 如是, 則 Γ_0 之焦弦即其直徑, 而 Γ_0 之所有焦弦之中點所構成之圖形即 Γ_0 之中心 $F_0 = F'_0$ 矣。[若在平面 $\prod$ 上建立直角坐標系, 使 $F_c = (c, 0)$, $F'_c = (-c, 0)$, 則 Γ_c 之方程式即爲 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$, 其中 $a > c \geq 0$。當然, Γ_c (含橢圓及圓) 之離心率爲 $e = \frac{c}{a}$。]

問題4: 試求橢圓所有焦弦之中點所構成之圖形。

問題5: 試求雙曲線所有焦弦之中點所構成之圖形。

問題6: 試求拋物線所有焦半徑之中點所構成之圖形。

問題7: 試求橢圓所有焦半徑之中點所構成之圖形。

問題8: 試求雙曲線所有焦半徑之中點所構成之圖形。

問題9: 設 L_1 及 L_2 均爲平面 $\prod$ 上之定直線, $L_1 \cap L_2$ 僅含一點, $\Gamma = L_1 \cup L_2$。顯然, 若直線 Λ 與 Γ 之交點個數 $n(\Lambda \cap \Gamma) = 2$, 則其一交點必在 L_1 上且不在 L_2 上, 另一交點必在 L_2 上且不在 L_1 上。以此二交點爲端點之線段, 稱爲截線段。設 P_0 爲 $\prod$ 上一個定點, (i) 試求過 P_0 且與 Γ 之交點個數爲2之所有直線所對應之截線段之中點所構成之圖形, (ii) 試求含 P_0 之所有截線段之中點所構成之圖形。

例三: 一定長線段兩端在兩互相垂直之直線上移動, 求此線段上一任意定點之軌跡。

某書提供之解答, 如下所示。其論述有何謬誤? 試予一正解, 俾便比較。

定長線段 AB 之長爲 k, 兩互相垂直之直線爲 x 及 y 軸, 且令 A 在 y 軸上移動, B 在 x 軸上移動, 故可令 $A(0, y')$, $B(x', 0)$。

$\because P$ 爲 AB 上一定點,

$\therefore \frac{AP}{PB} = r$ (r 爲定值),

故 $x = \frac{rx'}{1+r}$, $y = \frac{y'}{1+r}$,

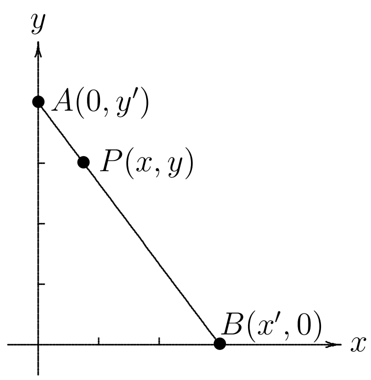
或 $x' = \frac{(1+r)x}{r}$, $y' = (1+r)y$。

$\because x'^2 + y'^2 = k^2$,

$\therefore \frac{(1+r)^2x^2}{r^2} + (1+r)^2y^2 = k^2$,

或 $\frac{x^2}{\frac{r^2k^2}{(1+r)^2}} + \frac{y^2}{\frac{k^2}{(1+r)^2}} = 1$。

此爲橢圓之範式, 故其軌跡爲一橢圓。



正解: 爲方便計, 可以題予之正交二直線爲坐標軸, 建立直角坐標系。設題予定長線段 L 之長爲 ℓ, 其二端點爲 A 及 B, 且 P 爲 L 上之一定點。

(1) 若 P 非 L 之端點 (即 P 爲 L 之內點), 令 $\frac{AP}{PB} = r$ $(r > 0)$。設 L 在上述坐標平面上移動, 使 A 恆在 y 軸上, 且 B 恆在 x 軸上時 [參看圖 (i)], 動點 P 之軌跡爲 Ω_1; 並設 L 在此坐標平面上移動, 使 A 恆在 x 軸上, 且 B 恆在 y 軸上時 [參看圖 (ii)], 動點 P 之軌跡爲 Ω_2。

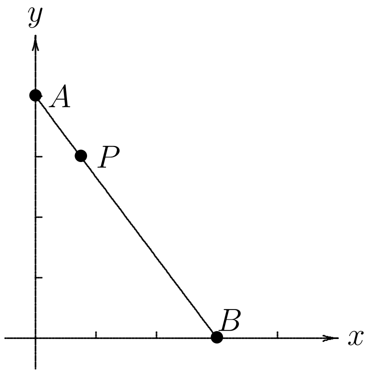


圖 (i)

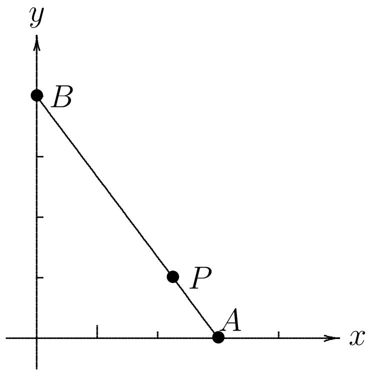


圖 (ii)

$< \alpha >$ 軌跡 Ω_1 之推求

參看圖 (i), 若 $P=(x_1,y_1)\in\Omega_1$, 令 $A=(0,y_0)$, $B=(x_0,0)$, 則由 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{PB}$ [即 $x_1=r(x_0-x_1)$, $y_1-y_0=-ry_1$], 可得 $x_0=\frac{(1+r)x_1}{r}$, $y_0=(1+r)y_1$。以之代入 $AB=\ell$, 遂有 $\ell^2=x_0^2+y_0^2=\frac{(1+r)^2x_1^2}{r^2}+(1+r)^2y_1^2$, 即 $\frac{x_1^2}{(\frac{r\ell}{1+r})^2}+\frac{y_1^2}{(\frac{\ell}{1+r})^2}=1$, 故 P 必在方程式 $\frac{x^2}{(\frac{r\ell}{1+r})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\ell}{1+r})^2}=1$ 所表之圖形 Ψ_1 上。如是, 證得 $\Omega_1\subseteq\Psi_1$。

反之, 若 $P'=(x_1,y_1)\in\Psi_1$, 令 $x_0=\frac{(1+r)x_1}{r}$, $y_0=(1+r)y_1$, $A'=(0,y_0)$, $B'=(x_0,0)$, 則實際計算可得 $x_0^2+y_0^2=\ell^2$, $A'P'=rP'B'$, 遂知 P' 係長爲 ℓ 之線段 $A'B'$ 之內點, 且 $\frac{A'P'}{P'B'}=r$, 故 $P'\in\Omega_1$。如是, 證得 $\Psi_1\subseteq\Omega_1$。

合之, 遂知 Ω_1 即方程式 $\frac{x^2}{(\frac{r\ell}{1+r})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\ell}{1+r})^2}=1$ 所表之圖形 Ψ_1 [爲橢圓 (若 $r\neq 1$) 或圓 (若 $r=1$)] 矣。

$< \beta >$ 軌跡 Ω_2 之推求

參看圖 (ii), 設 $s=\frac{1}{r}$, 則 $\frac{BP}{PA}=s$, 故據 $< \alpha >$ 所得結果, 遂知 Ω_2 即方程式 $\frac{x^2}{(\frac{s\ell}{1+s})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\ell}{1+s})^2}=1$ [亦即方程式 $\frac{x^2}{(\frac{\ell}{1+r})^2}+\frac{y^2}{(\frac{r\ell}{1+r})^2}=1$] 所表之圖形 Ψ_2 [爲橢圓 (若 $r\neq 1$) 或圓 (若 $r=1$)] 矣。

(2) 若 P 爲 L 之端點, 則顯然可知: 動點 P 之軌跡係以 $(\ell,0)$, $(0,\ell)$, $(-\ell,0)$ 及 $(0,-\ell)$ 四點爲頂點之正方形之二對角線。

結論: 設題予之正交二直線爲 L_1 及 L_2, 定長線段 L 之長爲 ℓ, 且 P 爲 L 上之一定點。綜上論述, 可知

①若 P 將 L 分割成二線段, 且此二線段長之比爲 r, 則當 $r\neq 1$ 時, 動點 P 之軌跡爲二橢圓, 此二橢圓皆對稱於直線 L_1 及 L_2, 且此二者二軸 (即長軸及短軸) 之半長皆爲 $\frac{r\ell}{1+r}$ 及 $\frac{\ell}{1+r}$;

②若 P 將 L 平分 (即 $r=1$), 則動點 P 之軌跡爲一圓, 此圓當然與 $L_1\cup L_2$ 共面; 其中心爲 L_1 與 L_2 之交點, 其半徑爲 $\frac{\ell}{2}$;

③若 P 爲 L 之端點, 則動點 P 之軌跡係 $L_1\cup L_2$ 中互相垂直平分之二線段, 此二線段之長皆爲 2ℓ。

備註: 前示某書所提供之解法, 僅考慮正解中之軌跡 Ω_1, 並推得 $\Omega_1\subseteq\Psi_1$, 而自正解中「反之」以下之論述, 則俱付之闕如, 其結論 (斷言軌跡爲一橢圓) 與正確答案相去甚遠!

問題10: 設 L_1 與 L_2 爲平面 $\prod$ 上之正交二直線, O 爲其交點, L 係定長 ℓ 之線段, P 爲 L 上一定點。若 L 在 $\prod$ 上移動, 使其一端點恆在 $L_i\setminus\{O\}$ 上, 且另一端點恆在 $L_j\setminus\{O\}$ 上, 其中 $\{i,j\}=\{1,2\}$, 試求動點 P 之軌跡。

問題11: 設 L_1 與 L_2 爲平面 $\prod$ 上之斜交二直線, L 係定長 ℓ 之線段, P 爲 L 上一定點。若 L 在 $\prod$ 上移動, 使其一端點恆在 L_i 上, 且另一端點恆在 L_j 上, 其中 $\{i,j\}=\{1,2\}$, 試求動點 P 之軌跡。

問題12: 設 L_1 與 L_2 爲平面 $\prod$ 上之斜交二直線, O 爲其交點, L 係定長 ℓ 之線段, P 爲 L 上一定點。若 L 在 $\prod$ 上移動, 使其一端點恆在 $L_i\setminus\{O\}$ 上, 且另一端點恆在 $L_j\setminus\{O\}$ 上, 其中 $\{i,j\}=\{1,2\}$, 試求動點 P 之軌跡。

例四: 在直角坐標平面上, 若過點 P 所作拋物線 $y^2=4cx$ 之法線有兩條互相垂直, 試求 P 之軌跡。

分析: 設 Γ 爲拋物線 $y^2=4cx$。

若點 $P_0(x_0,y_0)$ 在 Γ 上, 則由切線公式知 Γ 於 P_0 處之切線方程式爲 $y_0y=2c(x+x_0)$, 故其於 P_0 處之法線斜率爲 $m_0=-\frac{y_0}{2c}$, 可見 Γ 上任二處之法線斜率皆不相同。

若 m_0 爲任一實數, 令 $y_0=-2cm_0$, $x_0=\frac{y_0^2}{4c}=cm_0^2$, $P_0=(cm_0^2,-2cm_0)$, 則 $P_0\in\Gamma$, 據上遂知 Γ 於 P_0 處之法線斜率爲 m_0, 其方程式爲 $y+2cm_0=m_0(x-cm_0^2)$, 即 $y=m_0x-2cm_0-cm_0^3$。

由上, 可推得下述三項事實:

①Γ 之所有法線皆有斜率 (即 Γ 無縱向法線)。

②若 m_0 爲實數, 則 Γ 必有一條且僅有一條斜率爲 m_0 之法線。

③若 a,b 與 m_0 均爲實數, 則點 $P(a,b)$ 在斜率爲 m_0 之法線上 $\Leftrightarrow cm_0^3+(2c-a)m_0+b=0$。

解答: 設 Γ 爲拋物線 $y^2=4cx$, 並設 Ω 爲所求之軌跡。

(1) 若點 $P(a,b)$ 在 Ω 上, 則據題述條件及以上之分析, 知必有實數 m_1 及 m_2 能使 $m_1m_2=-1$, $cm_1^3+(2c-a)m_1+b=0$, $cm_2^3+(2c-a)m_2+b=0$。

設三次方程式 $cm^3 + (2c - a)m + b = 0$ 之三根爲 m_1, m_2 及 m_3, 則由根與係數之關係, 有 $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, $m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 = \frac{2c-a}{c}$, $m_1m_2m_3 = -\frac{b}{c}$。據此三式與 $m_1m_2 = -1$, 可得 $m_3 = (-\frac{b}{c})/(m_1m_2) = \frac{b}{c}$, $m_1 + m_2 = -m_3 = -\frac{b}{c}$, $\frac{2c-a}{c} = m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_3 = -1 - \frac{b^2}{c^2}$, 故 $b^2 = c(a - 3c)$, 遂知 $P(a, b)$ 必在方程式 $y^2 = c(x - 3c)$ 所表之圖形 Ψ [爲拋物線] 上。

(2) 反之, 若點 $P(a, b)$ 在 Ψ 上, 則 $b^2 = c(a-3c)$, 故 $a = \frac{b^2+3c^2}{c}$, $2c-a = -\frac{b^2+c^2}{c}$。實際解方程式 $cm^3+(2c-a)m+b = 0$, 即 $cm^3-\frac{b^2+c^2}{c}m+b = 0$, 亦即 $m(m^2-\frac{b^2}{c^2})-(m-\frac{b}{c}) = 0$, 可求得其三根爲 $m_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2+4c^2}}{2c}$, $m_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2+4c^2}}{2c}$ 及 $m_3 = \frac{b}{c}$。

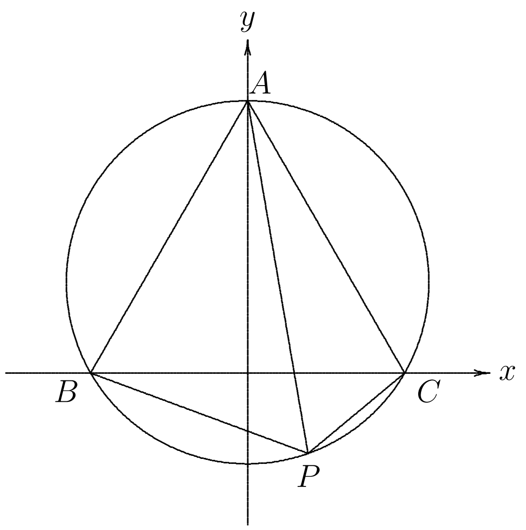
注意 m_1 及 m_2 均爲實數, 且 $m_1m_2 = -1$, 據前分析, 即知斜率爲 m_1 及 m_2 之二條正交法線皆過點 P, 故 $P \in \Omega$。

綜上, 遂得 $\Omega = \Psi$, 即所求之軌跡爲拋物線 $y^2 = c(x - 3c)$。

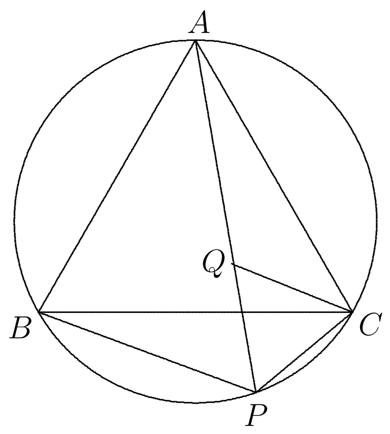
問題13: 在直角坐標平面上, 若拋物線 $y^2 = 4cx$ 之法線過點 P 者共有 $n(P)$ 條, 試求 $\{P \mid n(P) = 1\}$, $\{P \mid n(P) = 2\}$ 及 $\{P \mid n(P) = 3\}$。

例五: 設正三角形 ABC 在平面 $\prod$ 上。試求 $\prod$ 上合乎條件 $PA = PB + PC$ 之動點 P 之軌跡, 其中 PA, PB, PC 分別爲 P 與 A, B, C 三點之距離。

解一: 顯然, 在 $\prod$ 上, 可以過 B 與 C 二點之直線爲 x 軸, 以線段 BC 之中垂線爲 y 軸, 而建立直角坐標系, 使 $\triangle ABC$ 之頂點 A 之坐標爲 $(0, 3k)$, 另二頂點之坐標爲 $(\sqrt{3}k, 0)$ 及 $(-\sqrt{3}k, 0)$, 其中 $k > 0$。再者, 因將 B 與 C 互換時, 條件 $PA = PB + PC$ 不變, 故爲方便計, 不妨假設 $B = (-\sqrt{3}k, 0)$, $C = (\sqrt{3}k, 0)$。[參看圖一]



圖一



圖二

(1) 若 P 之直角坐標爲 (x,y), 且 $PA=PB+PC$, 則

$$\sqrt{x^2+(y-3k)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3}k)^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{3}k)^2+y^2}。$$

平方之, 得 $x^2+y^2+9k^2-6ky=2(x^2+y^2+3k^2)+2\sqrt{(x^2-3k^2)^2+2y^2(x^2+3k^2)+y^4}$,
即 $-[(x^2+y^2-3k^2)+6ky]=2\sqrt{(x^2+y^2-3k^2)^2+12k^2y^2}$。
平方之, 得
$$(x^2+y^2-3k^2)^2+12ky(x^2+y^2-3k^2)+36k^2y^2$$
$$=4(x^2+y^2-3k^2)^2+48k^2y^2,$$
即 $3[(x^2+y^2-3k^2)^2-4ky(x^2+y^2-3k^2)+4k^2y^2]=0$,
亦即 $(x^2+y^2-2ky-3k^2)^2=0$,
故 $x^2+y^2-2ky-3k^2=0$,
即 $x^2+(y-k)^2=4k^2$,
遂知 P 必在 $\triangle ABC$ 之外接圓上。

(2) 顯然, 當 $P=B$ 時, 有 $PA=PB+PC$; 當 $P=C$ 時, 亦有 $PA=PB+PC$。

當 P 在外接圓之劣弧 $\overset{\frown}{BC}\setminus\{B,C\}$ 上時, 考慮四邊形 $ABPC$, 則由 Ptolemy 定理, 有 $PA\cdot BC=PB\cdot AC+PC\cdot AB$, 即 $PA\cdot 2\sqrt{3}k=PB\cdot 2\sqrt{3}k+PC\cdot 2\sqrt{3}k$, 故 $PA=PB+PC$。[另一證法 (參看圖二): 設 P 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}\setminus\{B,C\}$ 上。(i) 考慮 $\triangle PAC$, 由三角形大角對大邊、小角對小邊之性質, 可知 $PA>PC$, 故可在線段 PA 上取點 Q, 使 $PQ=PC$。(ii) 由 $PQ=PC$ 及 $\angle APC=60^\circ$, 可知 $\triangle CPQ$ 爲正三角形, 故 $\angle AQC=120^\circ=\angle BPC$。(iii) 由 $\angle AQC=\angle BPC$ 及 $\angle CAQ=\angle CAP=\angle CBP$, 可知 $\angle ACQ=\angle BCP$ 。(iv) 由 $CA=CB, CQ=CP$ 及 $\angle ACQ=\angle BCP$, 可知 $\triangle ACQ$ 與 $\triangle BCP$ 全等, 故 $QA=PB$。(v) 由上, 遂有 $PA=PQ+QA=PC+PB$ 矣。]

合之, 即知 $\triangle ABC$ 外接圓之劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上之點 P 俱合乎條件 $PA=PB+PC$。

(3) 據 (2) 類推, 可得: P 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}\setminus\{B\}$ 時, $PC=PA+PB>PA$; P 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}\setminus\{C\}$ 時, $PB=PA+PC>PA$。[另法推導: (i) 由三角形大角對大邊、小角對小邊之性質, 可知 P 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}\setminus\{A,B\}$ 時, $PC>PA$; P 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}\setminus\{A,C\}$ 時, $PB>PA$。(ii) 當 $P=A$ 時, $PA=0<PB=PC$。]

綜上, 遂知所求之軌跡爲正三角形 ABC 之外接圓之劣弧 $\overset{\frown}{BC}$。

解二: 如解一所示, 在 $\prod$ 上建立直角坐標系。設 $A=(0,3k)$, $B=(-\sqrt{3}k,0)$, $C=(\sqrt{3}k,0)$, 其中 $k>0$。[參看圖一]

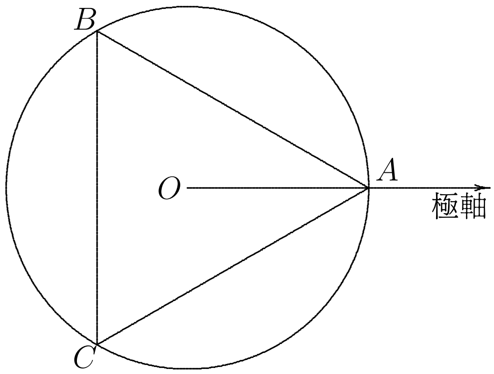
若 $P=(x,y)$ 爲 $\prod$ 上之點, 則 [參考解一 (1) 之推導]

$PA=PB+PC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3k)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3}k)^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{3}k)^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+9k^2-6ky=2(x^2+y^2+3k^2)+2\sqrt{(x^2-3k^2)^2+2y^2(x^2+3k^2)+y^4}$$
$$\Leftrightarrow -[(x^2+y^2-3k^2)+6ky]=2\sqrt{(x^2+y^2-3k^2)^2+12k^2y^2}$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-3k^2)^2+12ky(x^2+y^2-3k^2)+36k^2y^2$$
$$=4(x^2+y^2-3k^2)^2+48k^2y^2 \text{ 且 } x^2+y^2+6ky-3k^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-3k^2)^2-4ky(x^2+y^2-3k^2)+4k^2y^2=0$$
$$\text{且 } x^2+y^2+6ky-3k^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2ky-3k^2)^2=0 \text{ 且 } x^2+y^2+6ky-3k^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ky-3k^2=0 \text{ 且 } x^2+y^2+6ky-3k^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ky-3k^2=0 \text{ 且 } y\le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y-k)^2=4k^2 \text{ 且 } y\le 0\text{。}$$

據上, 遂知所求之軌跡爲正三角形 ABC 之外接圓之劣弧 $\overparen{BC}$。

解三: 顯然, 在 $\prod$ 上, 可以 $\triangle ABC$ 之外接圓之中心 O 爲極, 而建立極坐標系, 使 $\triangle ABC$ 之頂點 A 之極坐標爲 $(a,0)$, 另二頂點之極坐標爲 $(a,\frac{2\pi}{3})$ 及 $(a,\frac{4\pi}{3})$, 其中 a 爲 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑。再者, 因將 B 與 C 互換時, 條件 $PA=PB+PC$ 不變, 故爲方便計, 不妨假設 $B=(a,\frac{2\pi}{3})$, $C=(a,\frac{4\pi}{3})$。[參看圖三]



圖三

若 $\prod$ 上點 P 之極坐標爲 (r,θ), 則 [參考解一 (1) 及解二之推導]

$PA=PB+PC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta} = \sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\Big(\theta-\frac{2\pi}{3}\Big)} + \sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\Big(\theta-\frac{4\pi}{3}\Big)}$$

$$\Leftrightarrow r^2+a^2-2ar\cos\theta = 2(r^2+a^2+ar\cos\theta)$$

$$+2\sqrt{(r^2+a^2)^2+2ar(r^2+a^2)\cos\theta+4a^2r^2\cos\Big(\theta-\frac{2\pi}{3}\Big)\cos\Big(\theta-\frac{4\pi}{3}\Big)}$$

$$\Leftrightarrow -(r^2+a^2+4ar\cos\theta)$$

$$=2\sqrt{(r^2+a^2)^2+2ar(r^2+a^2)\cos\theta+4a^2r^2\cos\Big(\theta-\frac{2\pi}{3}\Big)\cos\Big(\theta-\frac{4\pi}{3}\Big)}$$

$$\Leftrightarrow (r^2+a^2)^2+8ar(r^2+a^2)\cos\theta+16a^2r^2\cos^2\theta$$

$$=4(r^2+a^2)^2+8ar(r^2+a^2)\cos\theta+16a^2r^2\cos\Big(\theta-\frac{2\pi}{3}\Big)\cos\Big(\theta-\frac{4\pi}{3}\Big)$$

$$=4(r^2+a^2)^2+8ar(r^2+a^2)\cos\theta+8a^2r^2\Big(\cos 2\theta+\cos\frac{2\pi}{3}\Big)$$

$$=4(r^2+a^2)^2+8ar(r^2+a^2)\cos\theta+16a^2r^2\cos^2\theta-12a^2r^2$$

$$\text{且 } r^2+a^2+4ar\cos\theta\le 0$$

$$\Leftrightarrow (r^2+a^2)^2=4a^2r^2 \text{ 且 } r^2+a^2+4ar\cos\theta\le 0$$

$$\Leftrightarrow (r^2-a^2)^2=0 \text{ 且 } r^2+a^2+4ar\cos\theta\le 0$$

$$\Leftrightarrow r^2=a^2 \text{ 且 } r^2+a^2+4ar\cos\theta\le 0$$

$$\Leftrightarrow r^2=a^2 \text{ 且 } r\cos\theta\le -\frac{a}{2}。$$

據上, 遂知所求之軌跡為正三角形 ABC 之外接圓之劣弧 $\overparen{BC}$。

備註: 考察解一, 若僅推導至 (1) 中之式 $x^2+(y-k)^2=4k^2$, 遽謂所求之軌跡為三角形 ABC 之外接圓, 則於邏輯上, 即犯過早論斷之謬誤矣。

問題14: 設正三角形 ABC 在平面 $\prod$ 上, 試求 $\prod$ 上合乎 $PA<PB+PC$, $PB<PC+PA$ 與 $PC<PA+PB$ 三條件之點 P 所構成之圖形, 其中 PA, PB, PC 分別為 P 與 A, B, C 三點之距離。

問題15: 設平面 $\prod$ 上 $\triangle ABC$ 各邊之長皆為 a, 高為 h。若點 P 在 $\prod$ 上, 以 $d_1(P)$, $d_2(P)$ 及 $d_3(P)$ 表 P 與 $AB^{\longleftrightarrow}$, $BC^{\longleftrightarrow}$ 及 $CA^{\longleftrightarrow}$ 三直線之距離。(i) 試求合乎條件 $d_1(P)=d_2(P)=d_3(P)$ 之點 P 所構成之圖形。(ii) 試求合乎條件 $d_1(P)+d_2(P)+d_3(P)=h$ 之點 P 所構成之圖形。(iii) 試求合乎條件 $d_1(P)+d_2(P)+d_3(P)=a$ 之點 P 所構成之圖形。(iv) 試求合乎 $d_1(P)+d_2(P)>d_3(P)$, $d_1(P)+d_3(P)>d_2(P)$ 與 $d_2(P)+d_3(P)>d_1(P)$ 三條件之點 P 所構成之圖形。

例六: 設平面 $\prod$ 上二圓 C_1 及 C_2 之半徑分別爲 1 及 3, 其連心線之長爲 10, 若點 X 在圓 C_1 上, 點 Y 在圓 C_2 上, 試求線段 XY 中點 M 之軌跡。

解答: 顯然 C_1 與 C_2 相離。[以下所考慮之點, 均限定在平面 $\prod$ 上。]

爲方便計, 可在 $\prod$ 上建立直角坐標系, 使圓 C_1 之中心爲 $(10, 0)$, 圓 C_2 之中心爲 $(0, 0)$。如是, 則圓 C_1 與 C_2 之參數方程式可分別表爲下列之 (1) 與 (2):

$$\begin{cases} x = 10 + \cos\theta, \\ y = \sin\theta。\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = 3\sin\theta。\end{cases} \tag{2}$$

若點 $A = (10+\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B = (3\cos\beta, 3\sin\beta)$, 而線段 AB 之中點爲 $M = (\bar{x}, \bar{y})$,

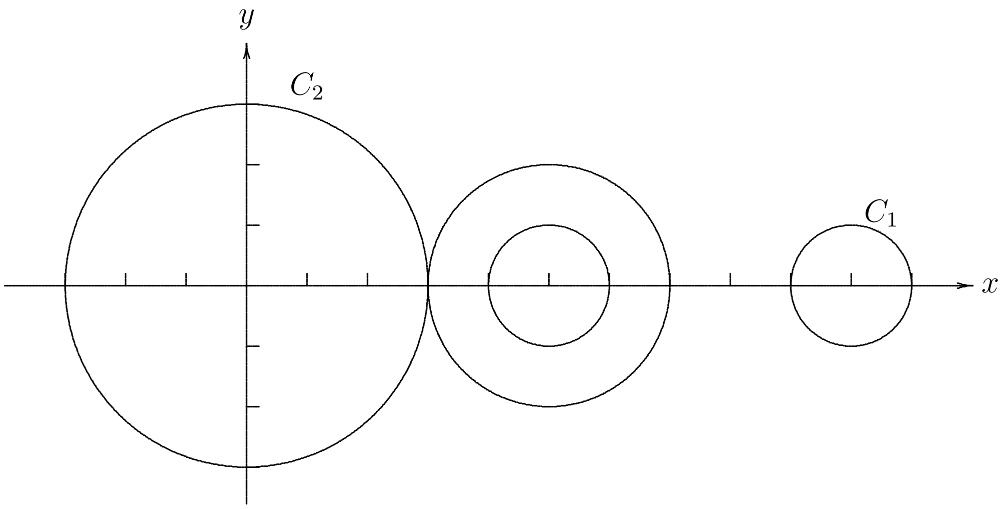
則
$$\bar{x} = 5 + \frac{\cos\alpha + 3\cos\beta}{2},$$
$$\bar{y} = \frac{\sin\alpha + 3\sin\beta}{2},$$

故
$$\begin{aligned}(\bar{x} - 5)^2 + \bar{y}^2 &= \frac{1}{4}[(\cos\alpha + 3\cos\beta)^2 + (\sin\alpha + 3\sin\beta)^2] \\ &= \frac{1}{4}[10 + 6(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)] \\ &= \frac{1}{2}[5 + 3\cos(\alpha - \beta)]。\end{aligned}$$

據此與 $-1 \le \cos(\alpha - \beta) \le 1$, 即得

$$1 \le (\bar{x} - 5)^2 + \bar{y}^2 \le 4。 \tag{3}$$

由是, 遂知所求之軌跡包含於不等式 $1 \le (x-5)^2 + y^2 \le 4$ 所表之同心圓環區域。



反之, 若點 $M=(\bar{x},\bar{y})$ 屬於上述同心圓環區域, 則 (3) 式成立。令 $P=(10,0)$, 並設 C_3 係以 $Q=(2\bar{x},2\bar{y})$ 爲中心, 以3爲半徑之圓。因圓 C_1 與 C_3 之連心線之長爲 $PQ=2\sqrt{(\bar{x}-5)^2+\bar{y}^2}$, 而據此與 (3) 可得 $3-1\le PQ\le 3+1$, 故 $C_1\cap C_3\ne\Phi$, 其中 Φ 爲空集合。[詳言之: 當 $PQ=2$ 時, C_1 與 C_3 內切; 當 $PQ=4$ 時, C_1 與 C_3 外切; 當 $2<PQ<4$ 時, C_1 與 C_3 相交於二點。] 若 $A\in C_1\cap C_3$, 令向量 $\overrightarrow{PA}=<\cos\alpha,\sin\alpha>$, $\overrightarrow{AQ}=<3\cos\beta,3\sin\beta>$, 則

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=<\cos\alpha+3\cos\beta,\sin\alpha+3\sin\beta>,$$

即 $<2\bar{x}-10,2\bar{y}>=<\cos\alpha+3\cos\beta,\sin\alpha+3\sin\beta>$, 故

$$\begin{cases}\bar{x}=5+\frac{\cos\alpha+3\cos\beta}{2},\\ \bar{y}=\frac{\sin\alpha+3\sin\beta}{2}。\end{cases}\tag{4}$$

顯然, 點 $A=(10+\cos\alpha,\sin\alpha)\in C_1$, 若令點 $B=(3\cos\beta,3\sin\beta)$, 則 $B\in C_2$, 且線段 AB 之中點坐標爲 $(5+\frac{\cos\alpha+3\cos\beta}{2},\frac{\sin\alpha+3\sin\beta}{2})$。據此與 (4), 即知 $M=(\bar{x},\bar{y})$ 爲線段 AB 之中點。

綜上論述, 遂推得所求之軌跡爲不等式 $1\le(x-5)^2+y^2\le 4$ 所表之同心圓環區域, 即以 C_1 與 C_2 二圓之連心線中點爲共同中心, 半徑爲1與2之二圓間之區域。

備註: (一) 若僅推導至 (3) 式 $1\le(\bar{x}-5)^2+\bar{y}^2\le 4$, 遽謂所求之軌跡爲不等式 $1\le(x-5)^2+y^2\le 4$ 所表之同心圓環區域, 則於邏輯上, 即犯過早論斷之謬誤矣。讀者宜注意: 過早論斷之謬誤實爲若干中文版數學書籍多數軌跡例題所予解答之主要通病。如本篇例一、例二及例三所示某書之推導, 即俱有此弊也!

(二) 本例採自第57屆 W. L. Putnam 數學競賽 (1996年12月2日舉行) 試題 A-2, 但原題未表明 C_1 與 C_2 在同一平面上。其實, 若考慮問題16及問題17 (見下), 不難證明: (i) 前者之軌跡亦爲同心圓環區域, (ii) 後者之軌跡並非圓環區域。

(三) Putnam 數學競試係由美國數學會主辦, 供美加地區大專院校學生參賽, 自首屆 (1938 年) 於哈佛大學舉行, 迄今六十餘年間, 已發掘甚多優秀人才, 造就不少卓越數學家, 並產生數位 Fields 獎得主。

問題16: 設圓 C_1 在平面 $\prod_1$ 上, 圓 C_2 在平面 $\prod_2$ 上, $\prod_1\parallel\prod_2$ $(\prod_1\ne\prod_2)$, C_1 與 C_2 之半徑分別爲1與3, 其連心線之長爲10, 若點 P_1 在圓 C_1 上, 點 P_2 在圓 C_2 上, 試求線段 P_1P_2 中點 M 之軌跡。

問題17: 設圓 C_1 在平面 $\prod_1$ 上, 圓 C_2 在平面 $\prod_2$ 上, $\prod_1$ 與 $\prod_2$ 正交或斜交, C_1 與 C_2 之半徑分別爲1與3, 其連心線之長爲10, 若點 P_1 在圓 C_1 上, 點 P_2 在圓 C_2 上, 試求線段 P_1P_2 中點 M 之軌跡。

問題18: 設 S_1 與 S_2 爲二球面, 其半徑分別爲1與3, 其連心線之長爲10, 若點 P_1 在球面 S_1 上, 點 P_2 在球面 S_2 上, 試求線段 P_1P_2 中點 M 之軌跡。

附記: 筆者曾撰 〈妙用坐標參數化法以解圓錐曲線諸弦中點圖形之描述問題〉 一文, 發表於《數學傳播季刊》26卷4期 (2002年12月) 28∼51頁, 對軌跡問題之解法有相當興趣者, 不妨參閱之。

—本文作者曾任教國立台灣大學數學系25年, 已於1991年8月退休自台大—