用解析法解決平面幾何問題優勢多多

胡紹宗

平面解析幾何是中學數學課程的重要組成部分, 它是以坐標系爲工具, 用代數方法研究平面幾何圖形, 它不僅是聯繫中學數學各部分知識的紐帶, 也是進一步學習高等數學和力學等不可缺少的工具。本文擬簡介如何運用平面解析幾何知識簡捷的解決平面幾何中的問題。爲了實現這一願望, 關鍵是首先要建立適當的坐標系, 選取坐標系的一般原則是:

(1) 選取圖形中的一個點作爲原點, 該點坐標即 (0, 0)

(2) 選取圖形中的一條直線作爲 x 軸或 y 軸, 該線上的點的縱坐標或橫坐標就是0。

(3) 若圖形中有兩條互相垂直的線段, 則應將這兩條線段所在的直線選爲坐標軸。

(4) 若圖形是軸對稱, 則應選擇對稱軸爲坐標軸; 若圖形中心對稱, 則應選擇對稱中心爲原點。

選擇坐標系時, 應根據具體圖形的特點, 目的是使有關點的坐標盡量簡單, 從而可使運算得到簡化。

例1. 證明三角形的垂心, 重心, 外心在同一直線上。

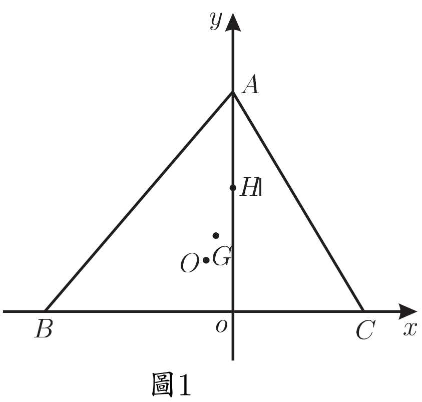

圖1

證: 取 ΔABC 的邊 BC 所在直線爲 x 軸, 邊 BC 上的高所在直線爲 y 軸, 建立如圖1所示的直角坐標系。

先分別求出垂心 H、重心 G、外心 O 的坐標。

設 $A(0,a)$、$B(b,0)$、$C(c,0)$, 則 $k_{AB}=-\frac{a}{b}$, 因而 $k_{CH}=\frac{b}{a}$, 於是 CH 的方程爲 $y=\frac{b}{a}(x-c)$。

由 $\begin{cases} y=\frac{b}{a}(x-c) \\ x=0 \end{cases}$ 可求出垂心 $H(0,-\frac{bc}{a})$。

由 A、B、C 的坐標可得重心 $G(\frac{0+b+c}{3},\frac{a+0+0}{3})$, 即 $(\frac{b+c}{3},\frac{a}{3})$。

設 $O(x_0,y_0)$, 則 $(x_0-0)^2+(y_0-a)^2=(x_0-b)^2+(y_0-0)^2=(x_0-c)^2+(y_0-0)^2$, 解得 $x_0=\frac{b+c}{2}$, $y_0=\frac{bc+a^2}{2a}$, 即 $O(\frac{b+c}{2},\frac{bc+a^2}{2a})$, 於是 $k_{HG}=\frac{a^2+3bc}{a(b+c)}=k_{GO}$,

$\therefore H$、G、O 共線。

例2. 以直角三角形的每邊爲邊向外作正方形, 則連結直角邊上正方形中心的線段和連結斜邊上的正方形中心與直角頂點的線段互相垂直且相等。

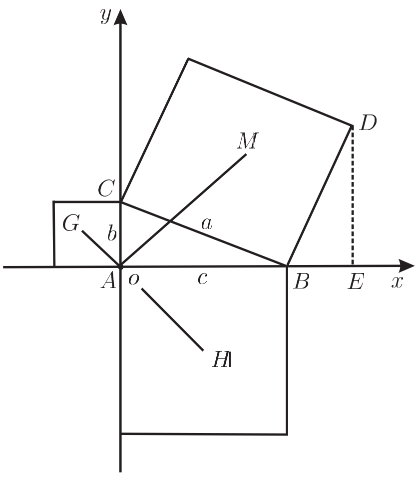

圖2

證: 取 $R_t\Delta ABC$ 的兩直角邊所在直線爲坐標軸, 建立如圖2所示的直角坐標系。設 G、H、M 分別是以 AC、AB、BC 爲邊的正方形中心, 則 $G(-\frac{b}{2},\frac{b}{2})$、$H(\frac{c}{2},-\frac{c}{2})$, 由 $k_{GA}=k_{AH}=-1$, 知 G、A、H 三點共線。

作 $DE\perp x$ 軸, 則 $Rt\Delta ABC\cong Rt\Delta EDB$, 因而 $D(b+c,c)$, 又 $C(0,b)$, 由中點坐標公式, 得 $M(\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})$, 於是 $k_{AM}=1$, 而 $k_{GH}=-1$, $\therefore AM\perp GH$。

由兩點間距離公式, 得 $|AM|=|GH|=\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$。

例3. 若 $CEDF$ 是一個已知圓的內接矩形, 過 D 作該圓的切線與 CE 的延長線相交於點 A, 與 CF 的延長線相交於點 B, 則 $\frac{|BF|}{|AE|}=\frac{|BC|^3}{|AC|^3}$。

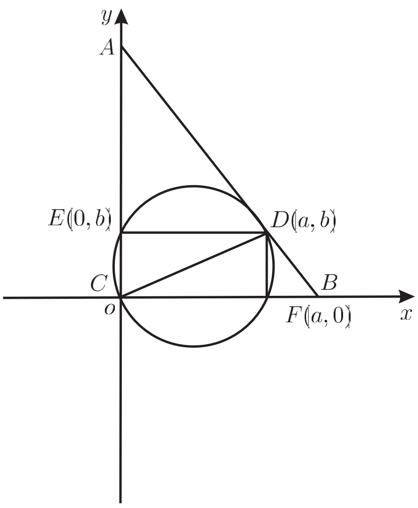

圖3

證: 取矩形的兩鄰邊 CF、CE 所在直線分別作 x 軸與 y 軸, 建立如圖3所示的直角坐標系。

設 $D(a,b)$, 則 $E(0,b)$、$F(a,0)$, 由 $k_{OD}=\frac{b}{a}$, 得 $k_{AB}=-\frac{a}{b}$, 則 AB 的方程爲

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a).$$

由 $\begin{cases} y-b=-\frac{a}{b}(x-a) \\ x=0 \end{cases}$, 得 $A(0,\frac{a^2+b^2}{b})$

由 $\begin{cases} y-b=-\frac{a}{b}(x-a) \\ y=0 \end{cases}$, 得 $B(\frac{a^2+b^2}{a},0)$

於是
$$\frac{|BF|}{|AE|}=\frac{\frac{a^2+b^2}{a}-a}{\frac{a^2+b^2}{b}-b}=\frac{b^3}{a^3}$$
$$\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\frac{a^2+b^2}{a}}{\frac{a^2+b^2}{b}}=\frac{b}{a}$$

$$\therefore \qquad \frac{|BF|}{|AE|}=\frac{|BC|^3}{|AC|^3}.$$

例4. 在 ΔABC 中, $AB=AC$, 高 AD、BE 相交於 K, $EF\perp BC$, 延長 AD 到 G, 使 $DG=EF$, L 爲 AK 的中點, 求證: $BG\perp BL$。

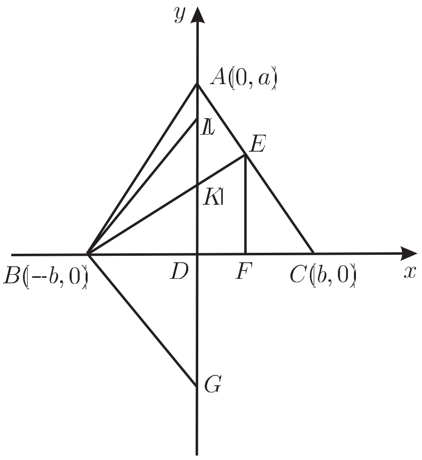

圖4

證: 取 ΔABC 的邊 BC 所在直線爲 x 軸, 過頂點 A 的對稱軸爲 y 軸, 建立如圖4所示的直角坐標系。

設 $C(b,0)$, $B(-b,0)$, $A(0,a)$, 則

AC 的方程爲 $y=-\frac{a}{b}(x-b)$

BE 的方程爲 $y=\frac{b}{a}(x+b)$

由 $\begin{cases} y=-\frac{a}{b}(x-b) \\ y=-\frac{b}{a}(x+b) \end{cases}$, 解得 $E(\frac{a^2b-b^3}{a^2+b^2},\frac{2ab^2}{a^2+b^2})$, 從而 $G(0,-\frac{2ab^2}{a^2+b^2})$, $k_{BG}=-\frac{2ab}{a^2+b^2}$。

由 $\begin{cases} y=\frac{b}{a}(x+b) \\ x=0 \end{cases}$, 解得 $K(0,\frac{b^2}{a})$。

由中點坐標公式, 得 $L(0,\frac{a^2+b^2}{2a})$, $k_{BL}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$, $k_{BG}\cdot k_{BL}=-1$, $\therefore BG\perp BL$。

例5. 圓 O 內一定點 A, 過 A 任作兩條互相垂直的弦, 求證這兩弦長的平方和爲定值。

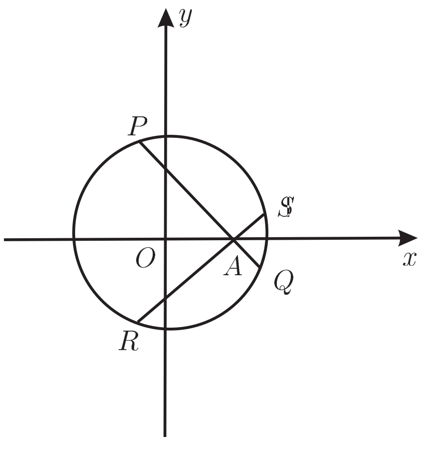

圖5

證法1: 取圓心 O 爲原點, 建立如圖5所示的直角坐標系。不失一般性, 定點 A 選在 x 軸上, 設 $A(x_0,0)$, 並設圓的方程爲 $x^2+y^2=r^2$。

當兩弦的斜率存在且不爲 0 時,

弦 PAQ 的方程爲 $y=k(x-x_0)$ ……………………①

弦 RAS 的方程爲 $y=-\frac{1}{k}(x-x_0)$

將 ①代入圓的方程, 得

$$(1+k^2)x^2-2k^2x_0x+k^2x_0^2-r^2=0 \quad \text{………②}$$

設 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, x_1、x_2 是方程 ②的兩個實根, 則由韋達定理, $x_1+x_2=\frac{2k^2x_0}{1+k^2}$, $x_1x_2=\frac{k^2x_0^2-r^2}{1+k^2}$。

於是
$$\begin{aligned}|PQ|^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+[k(x_1-x_0)-k(x_2-x_0)]^2\\&=(x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2=(x_1-x_2)^2(1+k^2)\end{aligned}$$

$$= [(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2](1+k^2)$$
$$= \left[\left(\frac{2k^2x_0}{1+k^2}\right)^2 - 4\cdot\frac{k^2x_0^2-r^2}{1+k^2}\right](1+k^2) = \frac{4(r^2+r^2k^2-k^2x_0^2)}{1+k^2}.$$

同樣可求 $|RS|^2 = \frac{4(r^2+r^2k^2-x_0^2)}{1+k^2}$。

$\therefore |PQ|^2+|RS|^2 = 4(2r^2-x_0^2)$。(定值)

當 k 不存在時, RS 位於 x 軸上,

$$|PQ|^2+|RS|^2 = 4(r^2-x_0^2)+(2r)^2 = 4(2r^2-x_0^2).$$

當 $k=0$ 時, 同理可證。

證法2: 用參數方程求證。由於兩弦垂直, 故傾角相差爲 $\frac{\pi}{2}$。

設兩垂直弦的參數方程分別爲

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{cases} \quad (t \text{ 爲參數}, \theta \text{ 爲傾角})$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = x_0 - t\sin\theta \\ y = t\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = t\cos\theta \end{cases}$$

分別代入圓的方程, 得

$$t^2 + 2x_0t\cos\theta + x_0^2 - r^2 = 0 \quad \text{......} ①$$

$$t^2 + 2x_0t\sin\theta + x_0^2 - r^2 = 0 \quad \text{......} ②$$

設方程 ①的兩根爲 t_1、t_2, 方程 ②的兩根爲 t_3、t_4, 則由韋達定理,

$$t_1+t_2 = -2x_0\cos\theta, \quad t_1t_2 = x_0^2-r^2$$
$$t_3+t_4 = 2x_0\sin\theta, \quad t_3t_4 = x_0^2-r^2$$

於是

$$\begin{aligned} |PQ|^2+|RS|^2 &= |t_1-t_2|^2+|t_3-t_4|^2 \\ &= (t_1+t_2)^2-4t_1t_2+(t_3+t_4)^2-4t_3t_4 \\ &= (-2x_0\cos\theta)^2-4(x_0^2-r^2)+(2x_0\sin\theta)^2-4(x_0^2-r^2) \\ &= 4(2r^2-x_0^2). \end{aligned}$$

例6. 已知扇形 OAB 中, 頂角 $\angle AOB = \alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, 半徑爲 r, P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的動點, 過 P 作 OB 的平行線交 OA 於點 Q, 求 ΔOPQ 面積的最大值。

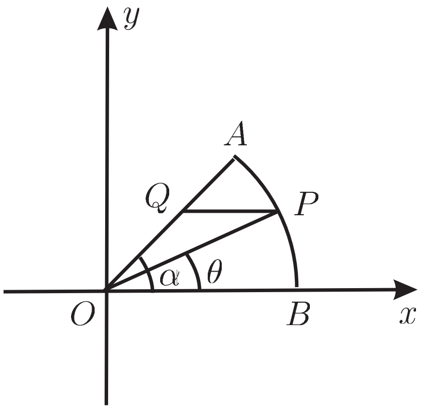

圖6

解法1: 取扇形頂點 O 爲原點, OB 所在直線爲 x 軸, 建立如圖6所示的直角坐標系。

弧 AB 的參數方程爲

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \alpha$$

$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, 直線 OA 的方程爲 $y = x\tan\alpha$, 直線 QP 的方程爲 $y = r\sin\theta$。

由 $\begin{cases} y = x\tan\alpha \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 得 $Q(\dfrac{r\sin\theta}{\tan\alpha}, r\sin\theta)$.

於是
$$\begin{aligned} S_{\Delta OPQ} &= \frac{1}{2}|OQ|\cdot|OP|\sin(\alpha-\theta) \\ &= \frac{r}{2}\sqrt{\frac{r^2\sin^2\theta}{\tan^2\alpha}+r^2\sin^2\theta}\cdot\sin(\alpha-\theta) \\ &= \frac{r^2\sin\theta}{2\tan\alpha}\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sin(\alpha-\theta) \\ &= \frac{r^2\sin\theta\sin(\alpha-\theta)}{2\sin\alpha} = \frac{r^2}{4\sin\alpha}[\cos(2\theta-\alpha)-\cos\alpha]. \end{aligned}$$

當 $\cos(2\theta-\alpha) = 1$, 即 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 時, $S_{最大} = \frac{r^2}{4\sin\alpha}(1-\cos\alpha) = \frac{r^2}{4}\tan\frac{\alpha}{2}$。

解法2: 用極線坐標法求解。以 O 爲極, OB 爲極線軸, 建立極線坐標系 (參考圖6)。$\overset{\frown}{AB}$ 的方程爲 $\rho = r$, 直線 OA 的方程爲 $\theta = \alpha$, $P(r,\theta)$, $Q(\rho,\alpha)$, 則 $\rho\sin\alpha = r\sin\theta$, $\rho = \frac{r\sin\theta}{\sin\alpha}$。

於是
$$\begin{aligned} S_{\Delta OPQ} &= \frac{1}{2}\rho r\sin(\alpha-\theta) = \frac{r^2}{2\sin\alpha}\sin\theta\sin(\alpha-\theta) \\ &= \frac{r^2}{4\sin\alpha}[\cos(2\theta-\alpha)-\cos\alpha] \end{aligned}$$

當 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 時, $S_{最大} = \frac{r^2}{4}\tan\frac{\alpha}{2}$。

例7. 已知半圓 O 的直徑 AB, $AC\perp AB$, 且 $AC = \frac{1}{2}AB$, $BD\perp AB$, 且 $BD = \frac{3}{2}AB$, P 爲半圓上一點, 求封閉圖形 $ABDPC$ 面積的最大值。

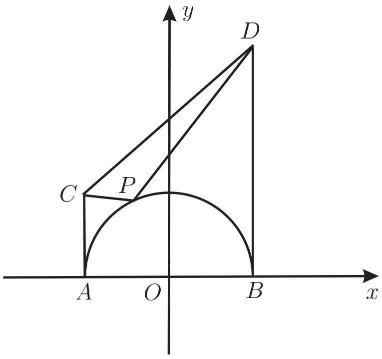

圖7

解法1: 取半圓直徑 AB 中點 O 爲原點, AB 所在直線爲 x 軸, 建立如圖7所示的直角坐標系。

因爲梯形 $ABCD$ 面積一定, 所以求封閉圖形 $ABDPC$ 面積的最大值, 就是求 ΔDPC 面積的最小值。

若 P 距離 CD 最近, 則 ΔDPC 面積最小, 因此可利用作切線求切點的方法求最值。

設半圓的方程爲 $x^2+y^2=r^2$ $(y\geq 0)$, $A(-r,0)$、$B(r,0)$、$C(-r,r)$、$D(r,3r)$。

設 $P(x_0,y_0)$, 當 P 點是平行於 CD 的圓的切線的切點時, $S_{\Delta DPC}$ 取得最小值。

由 $k_{CD}=\frac{3r-r}{r+r}=1$, 可設切線方程爲 $y=x+b$。

由 $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=x+b \end{cases}$, 得 $2x^2+2bx+b^2-r^2=0$。

$\Delta=(2b)^2-4\times 2(b^2-r^2)=0$, $b=\pm\sqrt{2}r$ (捨去負值)

由 $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=x+\sqrt{2}r \end{cases}$, 得 $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}r,\frac{\sqrt{2}}{2}r)$。

於是
$$S_{\Delta DPC}\text{最小值}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}r & \frac{\sqrt{2}}{2}r & 1 \\ r & 3r & 1 \\ -r & r & 1 \end{vmatrix} \text{ 的絕對值}$$
$$=(2-\sqrt{2})r^2$$

$$\therefore\quad S_{ABDPC}\text{最大值}=4r^2-(2-\sqrt{2})r^2=(2+\sqrt{2})r^2.$$

解法2: 半圓的參數方程爲

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad (0\leq\theta\leq\pi)$$

設 $P(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 則

$$S_{\Delta DPC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ r & 3r & 1 \\ -r & r & 1 \end{vmatrix} \text{ 的絕對值}$$
$$=(2+\cos\theta-\sin\theta)r^2$$

$$=\left[2+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)\right]r^2$$
$$=[2+\sqrt{2}\cos(\theta+45^\circ)]r^2$$

當 $\theta+45^\circ=180^\circ$, 即 $\theta=135^\circ$ 時, $S_{\Delta DPC}$ 取得最小值。
$S_{\Delta DPC\text{最小}}=(2-\sqrt{2})r^2$.
$\therefore S_{ABDPC\text{最大}}=4r^2-(2-\sqrt{2})r^2=(2+\sqrt{2})r^2$.

解法3: 設 $P(x_0,y_0)$, 則過 P 點的切線方程爲

$$x_0x+y_0y=r^2,\quad x_0x+y_0y-r^2=0 \quad\text{①}$$

平行於直線 CD 的圓的切線方程爲

$y=kx\pm\sqrt{k^2+1}r$ (捨去負值), 由解法1, 知這裡 $k=1$,

$$\text{即}\quad x-y+\sqrt{2}r=0 \quad\text{②}$$

由於 ①、②表示同一條直線, 故有

$$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{-1}=\frac{-r^2}{\sqrt{2}r}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}r \\ y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}r \end{cases}.$$

(以下同解法1)

例8. 在半圓 O 中, 定點 A 在直徑 EF 的延長線上, B 點在半圓周上運動。以 AB 爲一邊作正三角形 ABC, 問 B 在何處時, O、C 兩點的距離最遠, 並求出最遠距離。

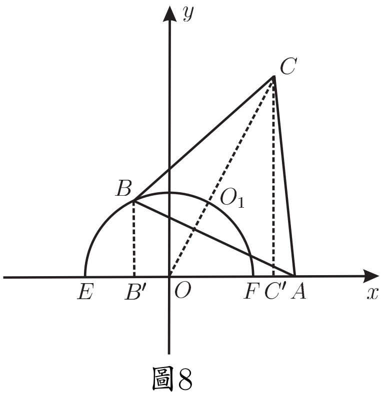

圖8

解法1: 取 EF 的中點 O 爲原點, EF 所在直線爲 x 軸, 建立如圖8所示的直角坐標系。由於 C 是動點, 故可求出 C 點的軌跡, 再利用 C 點的軌跡方程, 求 O、C 兩點的最遠距離。

設定圓半徑 $|OE|=r$, $|OA|=a$, $\angle BAO=\alpha$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$。則有 $x_1^2+y_1^2=r^2$, $|B'A|=a-x_1$。

$$\therefore\quad x_1=a-|B'A|=a-|AB|\cos\alpha,\quad y_1=|AB|\sin\alpha$$

$\because \quad |AB|=|BC|=|AC|$

$$\therefore \quad a-x_2=|AC|\cos(\alpha+60^\circ)=|AC|\cos\alpha\cos 60^\circ-|AC|\sin\alpha\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}|AB|\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|\sin\alpha=\frac{1}{2}(a-x_1)-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1.$$

由此可得
$$x_2-\frac{a}{2}=\frac{x_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\begin{aligned} a-x_1=|AB|\cos\alpha=|AC|\cos\alpha&=\frac{|CC'|\cos\alpha}{\sin(\alpha+60^\circ)}\\ &=\frac{y_2\cos\alpha}{\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}=\frac{y_2\cos\alpha}{\frac{1}{2}\frac{y_1}{|AB|}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}\\ &=\frac{y_2\cos\alpha}{\frac{1}{2}\frac{y_1}{\frac{a-x_1}{\cos\alpha}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}=\frac{y_2}{\frac{1}{2}\frac{y_1}{a-x_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &=\frac{2y_2(a-x_1)}{y_1+\sqrt{3}(a-x_1)}\end{aligned}$$

兩邊除以 $a-x_1$, 得
$$1=\frac{2y_2}{y_1+\sqrt{3}(a-x_1)}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}a-y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{y_1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

由 $①^2+②^2$ 及 $x_1^2+y_1^2=r^2$, 得
$$\left(x_2-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y_2-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=r^2$$

因此動點 C 的軌跡是以 $O_1(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 爲圓心, 半徑爲 r 的圓。

當動點 C 在連心線 OO_1 上時, 動點 C 與 O 點的距離最遠, 且最遠距離爲
$$|OC|=|OO_1|+|O_1C|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}+r=a+r.$$

下面求當 C 點離 O 最遠時 B 點的位置:
設 $\angle O_1OA=\beta$, 則 $\tan\beta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\sqrt{3}$, $\beta=60^\circ$。

C 點坐標爲 $\begin{cases} x=|OC|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}(a+r)\\ y=|OC|\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+r)\end{cases}$

於是 $|AB|^2=|AC|^2=[a-\frac{1}{2}(a+r)]^2+[O-\frac{\sqrt{3}}{2}(a+r)]^2=a^2+r^2+ar$。

$$\cos\angle BOA=\frac{|OB|^2+|OA|^2-|AB|^2}{2|OB|\,|OA|}=\frac{r^2+a^2-(a^2+r^2+ar)}{2ar}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad \angle BOA=120^\circ$

解法2: 利用半圓的參數方程, 解 ΔOAC, 得到 $|OC|$ 的三角函數表達式, 再求最值。

設 $|OB|=|OE|=|OF|=r$, $|OA|=a$, 則半圓的參數方程

爲
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\quad (0\le\theta\le\pi)$$

再設 $\angle BAO=\alpha$, $B(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 則有

$$\begin{aligned}
|AB|^2&=|OB|^2+|OA|^2-2|OB|\,|OA|\cos\theta=r^2+a^2-2ar\cos\theta\\
|OC|^2&=|AC|^2+|OA|^2-2|AC|\,|OA|\cos(\alpha+60^\circ)\\
&=|AC|^2+a^2-2a|AC|(\cos\alpha\cos 60^\circ-\sin\alpha\sin 60^\circ)\\
&=|AB|^2+a^2-2a\left(\frac{1}{2}|AB|\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|\sin\alpha\right)\\
&=r^2+a^2-2ar\cos\theta+a^2-2a\left[\frac{1}{2}(a-r\cos\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta\right]\\
&=r^2+a^2-ar\cos\theta+\sqrt{3}ar\sin\theta\\
&=r^2+a^2-2ar\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\
&=r^2+a^2-2ar\cos(\theta+60^\circ)
\end{aligned}$$

因此, 當 $\cos(\theta+60^\circ)=-1$, 即 $\theta=120^\circ$ 時, C 點到 O 點距離最遠, 即

$$|OC|=\sqrt{a^2+r^2+2ar}=a+r.$$

解法3: 利用複數的四則運算, 求出 $|OC|$ 的函數式, 再求最值。

在複平面上, A 點對應複數 a, B 點對應複數 $r\cos\theta+ir\sin\theta$。

$\overrightarrow{BA}$ 逆時針旋轉 60° 到 $\overrightarrow{BC}$, 設 C 點對應的複數 Z_C, 則

$$\begin{aligned}
Z_C&=[(a-r\cos\theta)-ir\sin\theta](\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)+r\cos\theta+ir\sin\theta\\
&=\frac{a}{2}+\frac{r}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta+\frac{r}{2}\sin\theta\right)i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|OC|^2=|Z_C|^2&=\left(\frac{a}{2}+\frac{r}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta+\frac{r}{2}\sin\theta\right)^2\\&=a^2+r^2-ar\cos\theta+\sqrt{3}ar\sin\theta=a^2+r^2-2ar\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\&=a^2+r^2-2ar\cos(\theta+60^\circ).\end{aligned}$$

(以下同解法2)。

—本文作者任教於中國安徽省阜陽師範學院—