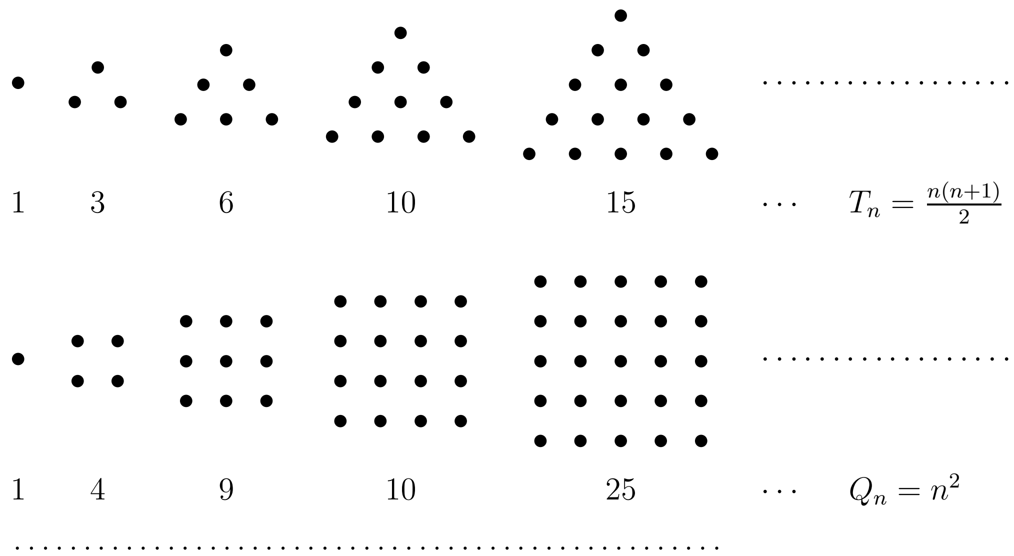
幾個與“形數”有關的問題

吳振奎

早在兩千多年以前, 古希臘畢達哥拉斯 (Pythagoras) 學派的學者們已經開始了對於“形數”的研究, 他們將能夠用石子 (點) 表示成三角形、四角形、五角形、...... 形狀的數, 分別稱爲三角形數、四角形數、五角形數、......, 且將它們統稱“形數”:



我們容易算得這些形數的通項如下表所示:

多角形數	三角形數	四角形數	五角形數	六角形數	⋯	k角形數
通項	$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$Q_n = n^2$	$P_n = \frac{3n^2-n}{2}$	$2n^2 - n$	⋯	$n + \frac{(n^2-n)(k-2)}{2}$

人們很早就發現形數有許多性質, 比如:

① 每個四角形數都是兩相鄰三角形數和, 即 $Q_n = T_n + T_{n-1}$;

② 每個五角形數都是一個四角形數與一個三角形數之和, 即 $P_n = Q_n + T_{n-1}$;

③ 每個偶完全數都是一個三角形數;

....

這些性質較爲直觀、易見, 接下來我們談幾個與形數有關, 然而並非顯見的問題。

一. num = △ + △ + △

1796年7月10日, 有“數學王子”美譽的德國數學家高斯 (C. F. Gauss) 在他的日記中寫道:

$$\text{EΓPHKA!} \quad \text{num} = \triangle + \triangle + \triangle.$$

這裡 EΓPHKA 是希臘文“發現”或“找到”之意, 它也正是當年阿基米德 (Archimedes) 在浴池中發現“浮力定律”後, 赤身跑到希拉可夫大街上狂喊的話語, 高斯的引用足見他的欣喜之情。高斯到底發現了什麼? 什麼使他如此興奮? 原來他找到了“自然數可表示爲三個三角形數之和”的證明 (num 爲西文數的縮寫, △ 表示三角形數)。

據稱此前法國數學家費馬 (P. de Fermat) 曾猜測: 每個自然數皆可用 k 個 k 角形數和表示。

對於四角形數的問題, 我們稍後再談。

1831年法國數學家柯西 (A. L. Cauchy) 在巴黎科學院宣讀了他的論文, 論文給出自然數皆可用 k 個 k 角形數和表示的證明。

二. 自然數表為四角形數問題

早在公元3世紀前後, 數學家丟番圖 (Diophantus) 曾猜測: 自然數皆可用四個四角形數 (即完全平方數) 和表示。

其實, 許多自然數只須用兩個完全平方數和便可表示 (如 $5 = 1^2 + 2^2$, $8 = 2^2 + 2^2$ 等等), 但有些不行 (像 3, 6, 7, 等等), 是費馬首先認識到質數 (除2之外) 皆有 $4k+1$ 或 $4k+3$ 形狀, 而後他發現了:

$4k+1$ 型質數皆可表爲兩完全平方數和形式 (雙平方和定理)。

該定理於1754年由數學大師歐拉 (L. Euler) 給出證明 (1977年拉森 (L. C. Larson) 用圖論的方法即“n 后問題”解法亦給出該定理的一個漂亮證明 [7])。

此後勒讓德 (A. M. Legendre) 又指出 (在其所著「數論」書中): $4^m(8n+7)$ 型整數必須用四個完全平方數和表示。

自然數表爲四個完全平方數和問題曾引起不少人的興趣, 1621年法國人巴契特 (Bachet) 從1驗算到325未發現例外。據稱笛卡兒 (R. Descartes) 也試圖探討該問題, 然旋即他便道: “它實在太難了!”

三. 讓歐拉想了十三年

1730年歐拉開始接觸該問題。一上來他便遇到極大困難。也許他讀過印度人波羅摩笈多 (Brahmagupta) 的「波羅摩修正曆數書」, 書中給出一個公式, 它用現今數學符號可表爲:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(ax+by)^2,$$

公式是說: 可用兩平方數和表示的兩自然數之積仍可用兩平方數和來表示。

對於用三個平方數和表示的情形, 人們卻找不到類似的結論, 只是發現:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ax+by)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2$$

這樣一個公式。

歐拉潛心研究, 希望對四平方數和找到一個類似等式, 十三年後他終於找到了等 (公) 式:

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+d^2)(r^2+s^2+t^2+u^2)\\ =&(ar+bs+ct+du)^2+(as-br+cu-dt)^2+(at-bu-cr+ds)^2+(au+bt-cs-dr)^2.\end{aligned}$$

這個等 (公) 式是說: 能表示成四個完全平方數和的兩數之積亦可用四個完全平方數和表示。如此一來, 對於整數表爲四平方和問題的研究, 可轉化爲質數表爲四完全平方數和的問題 (相對容易了)。[4]

1770年, 數學家拉格朗日 (J. L. Lagrange) 依據歐拉的上述發現, 給出了 “自然數可表示爲四個完全平方數之和” (四平方和定理) 的第一個完整證明。

1773年, 已經雙目失明的66歲的歐拉, 也給出該結論的另一證明。

大約100年後, 德國數學家雅各比 (C. G. J. Jacobi) 又給出另外一種證法。

順便指出: 四平方和定理中允許相同數字平方和出現, 如果要求四完全平方數皆相異或互質, 結論將是另一番情形。

圖蘭 (George Turán) 首先發現: 自然數表示成兩兩互質的整數平方和時, 四個則不夠 (比如 $8k$ 或 $6k+5$ 型自然數便如此)。

鮑赫曼 (Bohman) 等 (還有 Fröberg 和 Riesel) 又發現: 當 $n\le 188$ 時, 有31個自然數 n 不能用四個相異的完全平方數和表示。且他們同時證明了: $n>188$ 時, n 皆可用五個彼此不同的完全平方數和表示。

四. 華林 (E. Waring) 問題

人們完成的自然數表爲四角形數即完全平方數和問題後, 開始把目光集中到它的推廣即自然數用完全立方數、四次方數、五次方數、...... 和表示問題。

1782年華林在其所著「代數沈思錄」中提出: 自然數可用9個完全立方數和、19個四次方數和、...... 表示, 人稱 “華林問題”。

爲方便計, 我們用 $g(k)$ 表示任意自然數可用 k 次方數和表示的最少個數, 則華林問題便是欲證 $g(3)=9$, $g(4)=19$ 等。

對於 $g(3)$ 問題, 1939年迪克森 (L. E. Dickson) 指出: 除23和239 (這也是雅谷比開列的自然數表成立方數和表中, 兩個須用9個立方數和表示的數) 外, 自然數皆可表爲8個立方數和。

而後, 朗道 (E. G. H. Landau) 又指出: 從某個充分大的 N 起, 自然數皆可表爲7個立方數和 (這類充分大的 n 的表示問題, 人們又用 $G(k)$ 表記, 如是朗道證明了 $G(3)=7$)。

1909年威弗利茨 (A. Wieferch) 嚴格證明了 $g(3)=9$。

對於 $g(4)$ 問題的研究, 法國數學家柳維爾 (J. Liouville) 曾證明 $g(4)\le 53$。他的證明很巧妙, 首先他找到了下面的公式 [3] [9]:

$$\begin{aligned}6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 &= (x_1+x_2)^4+(x_1+x_3)^4+(x_1+x_4)^4+(x_2+x_3)^4+(x_2+x_4)^4\\ &\quad +(x_3+x_4)^4+(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_1-x_4)^4\\ &\quad +(x_2-x_3)^4+(x_2-x_4)^4+(x_3-x_4)^4. \quad \text{(式右和爲8項)}\end{aligned}$$

接著他又將自然數 n 表爲 $6x+r$ $(r=0,1,2,3,4,5)$ 形式。由於任何 x 皆可表示四個完全平方數和, 即 $x=a^2+b^2+c^2+d^2$, 同時 a, b, c, d 也有類似表示:

$$\begin{aligned}a&=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2, \quad b=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2,\\ c&=c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2, \quad d=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2,\end{aligned}$$

將它們代入 $6x=6(a^2+b^2+c^2+d^2)$ 再注意到柳維爾的等式知, $6x$ 至多只須 $6\times 8=48$ 個四次方數和表示。

又 $r=0,1,2,3,4,5$ 中至多只須用5個四次方數和表示。如是, n 至多只須 $48+5=53$ 個四次方和表示。

之後, 威弗利茨將 $g(4)$ 改進到 37。

英國數學家哈代 (G. H. Hardy) 又證明: 對於充分大的 n, $g(4)=19$, 即 $G(4)=19$。

1939年戴維鮑特 (Davenport) 證明了 $G(4)=16$。

1986年四位美國數學家聯手證得 $g(4)=19$。至此華林問題獲解。

對於一般的 $g(k)$ 問題, 1908年希爾伯特 (D. Hilbert) 曾證得: 對於任何 k 來講, $g(k)$ 均爲有限。但對於 $g(5)$, $g(6)$, ..., $g(k)$ 等的估計一直不詳, 僅獲局部結果, 如陳景潤曾證得 $g(5)=37$ 等。

而對充分大的 n 起的 k 次方和表示問題, 人們已證得: $G(2)=4$, $G(4)=16$。

此外還有下面一些局部成果 (見表) [10]:

年份	結 論	證 明 者
1947	$G(3)\le 7$	[蘇] Ginyk
1989	$G(5)\le 18$, $G(6)\le 37$, $G(7)\le 45$, $G(8)\le 62$,	J. Brüdern
1986	$G(9)\le 82$	R. C. Vaughan

當然對於任意自然數 k, 有人猜測 $4\le G(k)\le 17$, 但這一結論的證明似乎還很遙遠。

五. $\mathbf{1729=1^3+12^3=9^3+10^3}$

印度傳奇數學天才羅曼奴贊 (S. Ramanujan) 受哈代之邀訪問英國期間一次小恙住院, 哈代乘出租車去醫院探望, 無意中說出他的出租車牌號是1729後, 羅曼奴贊立刻道: “1729是一個有趣的數, 它是能用兩種方法把同一整數表示為兩立方數和的最小整數”。[12]

其實, 早在1657年貝斯 (B. F. de Bessy) 就已經發現這個數及其表示。歐拉早年也發現 $635318657=59^4+158^4=133^4+134^4$ 這種可用兩種方法表為兩個四次方和的整數 (後來林奇 (Leech) 證明它是此類數中最小的一個)。

用多種形式將整數表為兩立方和問題曾引起不少數學家關注, 林奇 (Lindge) 在1957年發現了一個可用三種方式表示的這類整數:

$$87539319=167^3+436^3=228^3+423^3=255^3+414^3;$$

1983年 P. Vojta 又給出例子:

$$15170835645=517^3+2468^3=709^3+2456^3=1733^3+2152^3.$$

新近, Rosenstiel 等人找到一個可用四種方式表為兩立方和的整數:

$$6963472309248=2421^3+19083^3=5436^3+18948^3=10200^3+18072^3=13322^3+15530^3.$$

當然, 對於用兩種 (或以上) 方式表為3個 n 次方和的問題, 實質上是求解下面不定方程:

$$a^n+b^n+c^n=d^n+e^n+f^n \quad (n\ge 2)$$

當 $n=3$ 時, S. Vandemergel 給出62組解;

當 $n=4$ 時, 他給出3組解:

$$29^4+66^4+124^4=22^4+93^4+116^4,$$
$$54^4+61^4+196^4=28^4+122^4+189^4,$$
$$19^4+217^4+657^4=9^4+511^4+589^4.$$

此外, P. Montgomery 給出 $n=6$ 的18組解, 其中最小的一組爲:

$$25^6+62^6+138^6=82^6+92^6+135^6.$$

這裡順使指出, 與之相聯的另一類問題是: 自然數 n 表爲 k 個平方和的種類數 $r_k(n)$ 的研究, 對於部分 k 值至今已有如下結果:

$n=\sum_{i=1}^k x_i^2$ 的解的個數 $r_k(n)$ 表

$r_k(n)$ 的發現者	年份	k 的值
雅谷布·伯努利 (J. Bernoulli)	1828	2, 4, 6, 8
狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet)		3
艾森斯坦 (F. G. M. Eisenstein) 施密斯 (Smith) 等		5, 7
柳維爾	1864	10
柳維爾	1866	12
格拉舍爾 (Glaisher)	1907	14, 16, 18
羅曼奴贊	1916	20, 22, 24
道馬德耶 (Domadye)	1949	9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

此外, 人們還研究了不大於 N 的自然數可表爲 l 個 k 次冪和的個數 $A_{k,l}(N)$ 的估計式, 如對於 $k=l=2$ 的情形, 朗道給出估計:

$$A_{2,2}(N)\approx\frac{cN}{\sqrt{\ln N}},$$

意指不大於 N 的自然數可以表爲兩個二次方和的個數 (種類) 大約爲 $cN/\sqrt{\ln N}$, 這裡 c 爲某個常數。

六. 四元數

當數域實數擴充到複數後 (它其實是一個二元數), 人們也許不曾想到它與數用平方和表示問題的聯繫。其實, 若 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, 則

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

仔細品味後你會發現, 它與我們前面提到的波羅摩笈多公式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ax + by)^2$$

何等 “相似”(其實正好適合複數乘積的模性質)! 而歐拉花費13年找到的公式, 也許正是促使哈密頓 (W. R. Hamilton) 尋找四元數的依據 (其適合以 1, i, j, k 爲單位的超複數 $a + bi + cj + dk$ 相乘時的模運算法則)。

1843年10月16日, 哈密頓攜妻子沿都柏林皇家運河漫步時, 邊走邊考慮那久拖不解的難題 — 找到四元數, 行致布爾漢石橋, 突然茅塞頓開, 他急忙停下, 在筆記本寫下 [13]:

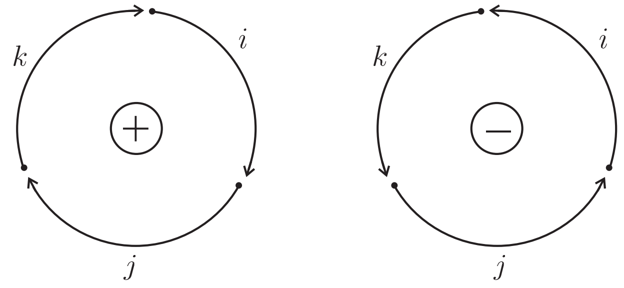
$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j; \\ &ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \end{aligned}$$

回到家裡他在計算草稿紙上依據上面法則算出:

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + tk) = &(ax - by - cz - dt) + (ay + bx + ct - dz)i \\ &+ (az - by + cx + dt)j + (at + bz - cy + dx)k. \end{aligned}$$

這恰好適合四元數運算的模法則, 該法則正是依據歐拉苦找了13年的等式, 而哈密頓自己爲此尋找了大約15年光景。

前面 i, j, k 的運算亦可用下圖表示 (圖弧箭線表示 i, j, k 相乘及積方向順序, 中心圓內符號表示積的符號):



此外也可用下表表述:

i, j, k 乘 法 表

$\times$	i	j	k
j	-1	k	$-j$
i	$-k$	-1	i
k	$-i$	$-i$	-1

四元數出現後, 人們又在試圖尋找維數更多的多元數。

凱萊 (A. Cayley) 和格拉維斯 (J. T. Graves) 均提出過八元數概念, 但此時, 這種數已不再滿足乘法結合律。

1848年, 柯克曼 (T. P. Kirkman) 證明: 不存在16個單元的超複數。

而後, 高斯曾猜測: 保持複數基本性質的數系不能再擴張下去。這一點後被外爾斯特拉斯 (T. W. Weierstrass) 和戴德金 (J. W. R. Dedekind) 所證實。

1878年德國數學家弗羅賓紐斯 (F. G. Frobenius) 給出更強的結論: 具有有限個單元的、有乘法的實係數線性結合代數系統, 且服從結合律的, 只有實數、複數和四元數。

1958年鮑特 (R. Bott), 米爾諾 (W. J. Milnor) 和克爾維爾 (Kerraire) 也曾證得:

實數域上能在 $+$、$-$、$\times$ 、$\div$ 運算下封閉的數系的維數僅有 1, 2, 4, 8 維。

七. 形數與 Fibonacci 數列及其他

數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 稱爲 Fibonacci 數列, 它是斐波那契 (Fibonacci) 於1202年在其所著「算盤書」中以兎生小兎問題而引發的、且在理論和實踐中都很重要的數列, 由於它本身有著許多奇妙性質, 以致國際上出版了專門研究它的雜誌「Fibonacci Quorterly」。[14] 該數列通項爲 $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ $(n \geq 1)$。

人們對於該數列的研究中, 也找到了它與形數有關的話題。

1971年 V. Hoggatt 發現且證明了: 在 Fibonacci 數列中僅有 1, 3, 21, 55 這四個三角形數。

此前, 1964年 J. H. E. Cohn 和中國四川大學的柯名相繼證明了: 在 Fibonacci 數列中僅有1和144這兩個四角形數 (完全平方數)。

誠然, 數論中有許多與四角形數 (完全平方數) 有關的話題, 比如可見 [15]。其中的所謂 “完美長方體” 即三條稜長及面、體對角線皆爲整數 (換言之: x, y, z 爲整數, x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2 和 $x^2+y^2+z^2$ 皆爲四角形數) 的長方體, 早年就爲歐拉 (L. Euler) 研究過, 且他

本人給出了稜長分別爲 104, 153 和 672, 體對角線長697, 兩個面對角線長爲185和680的例子, 遺憾的是還差一個面對角線也爲整數 — 人們將這類長方體稱爲 "擬完美長方體"。至於完美長方體究竟存在與否, 致今未有定論。

1993年 K. R. S. Sastry 提出將上述完美長方體問題中的 x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2, $x^2+y^2+z^2$ 由四角形數 (完全平方數) 改爲三角形數, 然問題亦無進展。

此前他還提到: 除邊長爲 $(3,4,5)$ 和 $(105,100,145)$ 外, 還有無其他畢達哥拉斯三角形, 其三條邊長恰好分別爲三角形數、四角形數和五角形數?

再者, C. Ashbacher 討論了下面的問題: 一組三角形數, 它們兩兩之和、三三之和、. . .、全部之和皆爲三角形數。這樣數組存在嗎?

對於三個數的情形他給出例子: 66, 105 和 105。它們本身是三角形數, 且他們兩兩之和、三數之和也都是三角形數。

我們當然可把問題推廣至四角形數 (n 個數兩兩之和皆爲四角形數的研究, 當 $n\le 6$ 的情形人們已給出例子 [15])、五角形數、. . . 、n 角形數中去。

N. Tzanakis 在1989年還證明了: 除了 6, 120, 210, 990, 185136 和 258474216 外, 再沒有其他三角形數爲三個相繼整數之積。

類似的論題還有很多, 我們深知: 在數學中, 只要有新概念提出, 就會有新問題產生, 儘管有時會重覆, 但它們是從不同角度、或在不同領域。

八. 綴言

從前文敍述我們看到: 數學中不少問題居然與 "形數" 有關, 這也正是數學自身特性使然。我們也許會在感嘆之餘靜下心來細細思索, 說不定還能發現更多 "蛛絲馬跡"。

1. 約數和與廣義五角形數

前文已述五角形數通項爲 $P_n=\frac{3n^2-n}{2}$, 若將 $\frac{3n^2+n}{2}$ 也定義爲它的同類, 這時

$$\tilde{P}_n=\frac{3n^2\pm n}{2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

這些數分別爲 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, . . . 它們被稱爲廣義五角形數。

設 $\sigma(N)$ 爲 N 的全部約數 (因子) 和 (包括1和它本身), 且規定 $\sigma(0)=0$, 人們證得:

$$\begin{aligned}&\sigma(N)-\sigma(N-1)-\sigma(N-2)+\sigma(N-5)+\sigma(N-7)-\sigma(N-12)\\&-\sigma(N-15)+\sigma(N-22)+\sigma(N-26)-\sigma(N-35)-\sigma(N-40)+\cdots=0.\end{aligned}$$

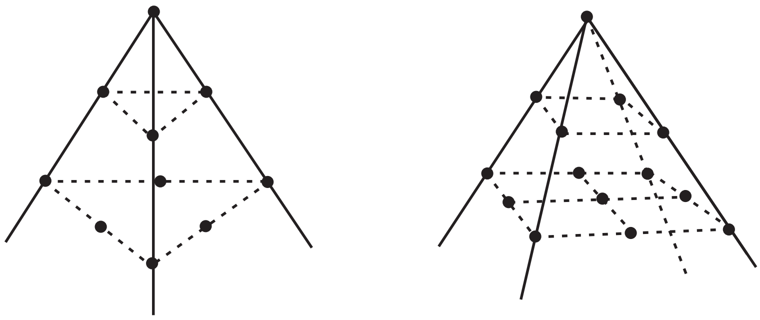
上式從某個角度展現了五角形數與自然數約數間的奇妙聯繫。正如美國紐約布魯克林學院的貝勒 (A. Beiler) 說的: 人們在五角形數與約數和之間表面上找不到絲毫關係, 然而實際上卻存在這個等式, 這從某個角度講, 宇宙比人們想像的要更爲奇妙。

2. 形數概念推廣

多角形數自然可以推廣到3維空間, 比如:

將三角形數一層一層擺放即有: $1,\ 1+3,\ 1+3+6,\ 1+3+6+10,\ \ldots,\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),\ \ldots$ 它被稱爲三稜錐 (或四面體) 數;

將四角形數一層一層擺放即有: $1,\ 1+4,\ 1+4+9,\ 1+4+9+16,\ \ldots,\sum_{k=1}^{n}Q_k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \ldots$ 它被稱金字塔 (或四稜錐) 數;



三稜錐數　　金字塔數

關於自然數表爲三稜錐數問題亦可視爲自然數用三角形數表示的推廣。這方面的結論有:

1928年楊武之證明: 自然數至多可用9個三稜錐數和表示; 1952年瓦特森 (Watson) 改進到8個。

與此同時, 沙爾茨 (Salzer) 用電子計算機對 $n\leq 452479659$ 的數進行驗算, 除261外皆可表爲5個三稜錐數和。1993年, 楊振寧、鄧越凡將 n 的上界推至 10^9。

再如, 魯卡斯 (E. Lucas) 早在1875年就已經指出: 金字塔數中僅有唯一的一個完全平方數 4900 (第28個)。此結論後被沃特森 (G. N. Watson) 證明。[6]

3. 被表 k 次方數中允許負整數的情形

前文我們指出 $g(3)=9$, 即自然數皆可表爲9個完全立方數和。這裡的立方數皆爲正整數。如果允許負整數出現結果又會如何?

截至目前人們已證得: 除 $9n\pm 4$ 型外的自然數, 皆可表爲4個立方數 (可爲負) 和。[2]

有人還對小於1000的自然數驗算後發現, 除

30	33	42	52	74	110	114	156	165	195	290
318	366	390	420	435	444	452	462	478	501	530
534	564	579	588	600	606	609	618	627	633	732
735	758	767	786	789	795	830	834	861	894	903
906	912	921	933	948	964	969	975			

外, 皆可用3個立方數和表示。[2] 如: $253=5^3+4^3+4^3$, $\quad 519=17^3+(-13)^3+(-13)^3$, 等。1993年 A. Bremner 給出 $75=435203083^3+4381159^3+(-435203231)^3$。顯然這是在用 "大" 立方數和表示 "小" 自然數, 另一個例子是: $84=41639611^3+(-41531726)^3+(-8241191)^3$。其他這方面的例子和結論亦可見 [12]。

又有人稱: 若將 "四平方和定理" 中平方數推廣至有理數, 則只須3個有理數平方和便可表示全部自然數。與 "形數" 有關的話題還有很多, 數學正是這樣: 那些看上去風馬牛的結論間, 卻有著耐人尋味的制約與聯繫, 形數概念當然也不會例外。撇開人們已經尋到的發現, 人們還會將這些工作繼續下去, 不斷探索、深入挖掘, 這也正是數學可以持續發展的動力與源泉。有了源泉, 水永遠不會枯竭。

参考文獻

1. U. 杜德利 (周仲良譯), 基礎數論。上海科學技術出版社, 1980。
2. R. K. 蓋伊 (張明堯譯), 數論中未解決的問題。科學出版社, 2003。
3. 南北, 衛人, 數學的趣味 (上) (下)。天津教育出版社, 1989。
4. 吳振奎, 數學中的推廣、反例及不可能問題。遼寧教育出版社, 1985 (九章出版社即將修訂重版)。
5. 阿爾伯特 · H · 貝勒 (談祥柏譯), 數論妙趣。上海教育出版社, 1998。
6. 吳振奎, 從 Lucas 的一則方程說起。數學傳播, 2003(2)。
7. 吳振奎, 數學中的巧合、聯繫與統一。數學傳播, 2003(3)。
8. M. 克萊因 (張理京等譯), 古今數學思想 (1 ∼ 4 册)。上海科學技術出版社, 1979-1986。
9. 漢斯 · 拉德梅徹, 奧托 · 托普利茨 (左平譯), 數學欣賞。北京出版社, 1981。
10. 單墫等, 數學名題詞典。江蘇教育出版社, 2002。
11. 胡作玄, 鄧明立, 20世紀數學思想。山東教育出版社, 1999。
12. 吳振奎, 吳旻, 名人 · 趣題 · 妙解。天津教育出版社, 2000 (九章出版社2002年重版)。
13. 李學數, 數學和數學家的故事 (1 ∼ 4 册)。新華出版社, 1999。
14. 吳振奎, 斐波那契數列。遼寧教育出版社, 1987 (九章出版社1993年重版)。
15. 吳振奎, 幾個與完全平方、平方和有關的問題。中等數學, 2003 (1), 2003 (2)。

—本文作者任教於中國天津商學院—