斐波納契是如何解方程的 ?*

汪曉勤

摘要: 本文以現代數學語言展示了13世紀義大利數學家斐波納契「花朵」一書的內容, 對書中某些問題的解法作了分析和探討。

關鍵字: 斐波納契, 花朵, 平方數之書, 不定方程。

斐波納契 (Leonardo Fibonacci, 1170?∼1250?) 是中世紀歐洲最偉大的數學家, 生於義大利當時的商業中心之一比薩, 約於1192年隨父去北非阿爾及利亞的布吉, 在那裡接受了很好的教育, 學會了算術和印度數碼; 不久踏上商途, 先後遊歷埃及、敍利亞、希臘 (拜占廷)、西西里和法國南部, 與各地的學者探討數學, 學到了各地的數學知識。約1200年, 斐波納契回到比薩, 此後25年間, 一直從事數學著述。斐波納契的才能引起皇帝弗雷德裏克二世的注意, 約1225年, 他被皇帝召見, 並在皇宮裡參加了數學競賽。約在1240年, 鑒於斐波納契對比薩所做出的重要貢獻, 比薩共和國獎給他特殊的年薪 (正常津貼除外)。主要著作有「計算之書」(Liber Abaci, 1202)、「幾何實踐」(Practica geometriae, 1220/1221)、「花朵」(Flos, 1225)、「平方數之數」(Liber guadratorum, 1225), 此外還有商業算術著作以及關於「幾何原本」第十卷的一本小册子。

儘管斐波納契這個名字因爲數學上的 “斐波納契數列” 而廣爲人知, 但人們對他的具體數學工作卻知之甚少。關於斐波納契最好的研究文獻大多爲義大利學者所寫 (如利布裡 (G. Libri, 1803∼1869)、波恩康帕尼 (P. B. Boncompagni, 1821∼1894)、洛利亞 (G. Loria, 1862∼1954) 等), 而最好的英文傳記則是德國數學史家弗格爾 (K. Vogel, 1888∼1985) 寫成的[1], 但弗格爾關於「花朵」的介紹語焉不詳。通過一些西方數學史著作的介紹, 國內讀者對「花朵」中前三個問題 (三平方問題、一元三次方程問題和三人共錢問題) 並不陌生, 但由於缺乏原始文獻, 難以瞭解包括這三個問題解法在內的全書內容。

1854年, 義大利數學史家波恩康帕尼整理出版了米蘭盎博羅削圖書館 (Biblioteca ambrosiana) 收藏的斐波納契著作的抄本, 包括「花朵」和「平方數之書」, 還有斐波納契寫給宮廷

* 本文得到上海市重點學科建設專案基金、數學天元青年基金和吳文俊絲路天文數學基金資助。

哲學家泰奧多魯斯 (Theodorus) 的信, 信中含有著名的 “買鳥問題” 以及一個幾何問題, 也收入「花朵」, 作爲該書的第二部分[2]。本文的討論按照書中問題所含未知數個數的順序進行。斐波納契原文一般用線段來表示數, 本文爲簡便起見, 全部採用今天的代數語言。

1. 一元二次方程問題 (幾何問題)

幾何問題包含在「花朵」第二部分, 斐波納契把解法呈交給泰奧多魯斯, 供他指正。問題如下:

在等腰三角形 ABC 中, 已知 $AB=AC=10$, $BC=12$, BC 邊上的高 $AD=8$。試在 AB 上求一點 E, 在 AC 上求一點 F, 在 BC 上求兩點 G 和 H, 使得 $AEGHF$ 是等邊五邊形。

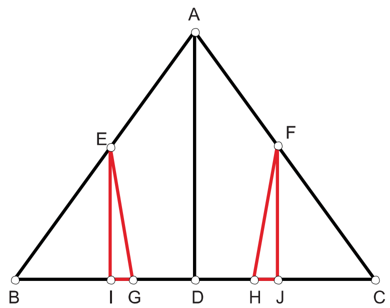

圖 1. 等腰三角形內接等邊五邊形問題。

假設 E、F、G、H 四點已作出, 過 E、F 向 BC 邊作垂線 EI、FJ, I、J 爲垂足。斐波納契證明: 直角三角形 BIE 和 CJF, 直角三角形 EIG 和 FJH 分別全等, 所以 $BG=CH$, $GD=DH$。設五邊形邊長爲 x, 斐波納契稱之爲 “物” (res), 則

$$BE=10-x,\quad EI=\frac{4}{5}(10-x)=8-\frac{4}{5}x,\quad BI=\frac{3}{5}(10-x)=6-\frac{3}{5}x,\quad GI=\frac{1}{10}x.$$

在直角三角形 EIG 中,

$$\left(8-\frac{4}{5}x\right)^2+\left(\frac{1}{10}x\right)^2=x^2,$$

整理得

$$x^2+36\frac{4}{7}x=182\frac{6}{7} \tag{1}$$

斐波納契把 x^2 稱作 *census*, 把已知數 $182\frac{6}{7}$ 稱作 *dragma*。這樣, 斐波納契就把幾何問題轉化爲代數問題了。

與花拉子米 (Al-Khwarizmi, AD 780?∼850?) 等阿拉伯數學家的做法相類似, 斐波納契用幾何方法來求解這個一元二次方程。構造邊長爲未知數 x 的正方形 $KLMN$, 分別延長 KN 和 LM 至 P 和 Q, 使得

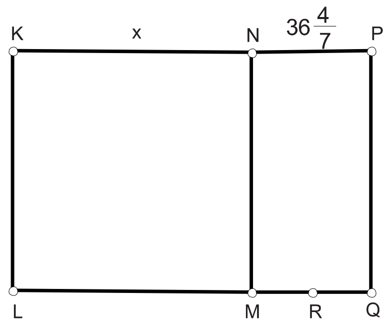

圖 2. 一元二次方程的幾何解法。

$NP = MQ = 36\frac{4}{7}$, 於是矩形 $KLQP$ 的面積即爲方程 (1) 的左邊, 因而

$$KL \cdot LQ = LM \cdot LQ = 182\frac{6}{7}$$

設 MQ 的中點爲 R, 則

$$MR = 18\frac{2}{7}, \quad MR^2 = 334\frac{18}{49}$$

根據歐幾裡得「幾何原本」第二卷命題6: "如果平分一線段, 並且在同一線段上給它加上一線段, 則整條線段與所加線段構成的矩形與原線段一半上正方形的和等於原線段一半與所加線段之和上的正方形", 斐波納契有

$$LR^2 = MR^2 + LM \cdot LQ = 517\frac{11}{49},$$

所以 $LR = 22.44'.33''.15'''$, 因而

$$x = LR - MR = 4.27'.24''.40'''.50^{IV}.$$

從上述幾何解法可以看出, 斐波納契實際上得到了我們今天十分熟悉的一元二次方程 $x^2+bx = c$ 的求根公式

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}.$$

2. 一元三次方程問題

這是來自 Parlemo 的宮廷學者 Johannes 向斐波納契提出的第二個問題, 由於它是歐洲數學史上第一個三次方程數值解問題, 因而顯得十分引人注目。這個方程是

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \tag{2}$$

斐波納契首先證明該方程的根在1和2之間, 因而不可能是整數。接著他證明:

(1) 方程的根也不可能是分數: 假設方程的根爲 $x=\frac{b}{a}$, 其中 $1<a<b<2a$, 且 $(a,b)=1$, 則

$$\frac{b^3}{a^3}+\frac{2b^2}{a^2}+\frac{10b}{a}=\frac{b[b^2+(10a+2b)a]}{a^3}=20$$

因 $(a,b)=1$, 故要使上述等式成立, 須 b 整除20, 因而只有下列情況:

b	4	5	10	20
a	3	3, 4	7, 9	11, 13, 17, 19

但上表所列情況都不能滿足等式。因此方程沒有有理根。

(2) 方程沒有形如 $\sqrt{n}$ 的無理根。因爲原方程可化爲 $x=\frac{20-2x^2}{x^2+10}$, 若 $x=\sqrt{n}$, 則根據上面的等式, $\sqrt{n}$ 爲有理數, 這是不可能的。

(3) 方程沒有形如 $\sqrt[4]{n}$ 的無理根, 否則有 $n^{\frac{1}{4}}+\frac{n^{\frac{3}{4}}}{10}=2-\frac{2n^{\frac{1}{2}}}{10}$, 根據「幾何原本」第10卷命題38, 這是不可能的。

(4) 最後, 斐波納契證明原方程沒有 $\sqrt{m}+\sqrt{n}$、$\sqrt{m+\sqrt{n}}$、$\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ (m、n 爲有理數) 的形式, 並給出根的近似值 (60進位) [1]

$$x=1°22'7''42'''33^{IV}4^{V}40^{VI}$$

用十進位表示, 即1.3688081078。斐波納契沒有給出具體的解法, 鑒於當時中國數學家已經會解三次方程, 而東西方已經有了交流, 美國數學史家史密斯 (D. E. Smith, 1860∼1944) 認爲斐波納契是在旅遊中學到的東方解法[3]。19世紀法國數學家勒貝格 (Lebesgue) 認爲, 斐波納契用的是後來韋達 (F. Viète, 1540∼1603) 使用的方法: 因方程的根在1和2之間, 故設 $x=1+\frac{y}{60}$, 於是得關於 y 的三次方程

$$y^3+300y^2+61200y=1512000$$

求出根的整數部分22, 再令 $y=22+\frac{z}{60}$, 等等。

3. 三元一次方程組問題

這是 Johannes 向斐波納契提出的第三個問題:

---

[1]原抄本中誤爲 $1°22'7''42'''30^{IV}4^{V}40^{VI}$, 19 世紀德國數學家、著名東方學家沃普克 (F. Woepcke, 1826∼1864) 發現 30 應爲 33。

三人把各自的錢放在一起, 各人的錢數分別是總數的 1/2, 1/3 和 1/6。每人從中取錢若干, 使無剩餘。第一人拿出所取的 1/2, 第二人拿出所取的 1/3, 第三人拿出所取的 1/6。將三人拿出的總數平分, 結果每人所得的錢數恰好是原有錢數。問: 三人共有多少錢? 從中取錢各多少?

設每人取錢數分別爲 x, y 和 z, 則由題意可得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{2}(x+y+z) \\ \frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{3}(x+y+z) \\ \frac{5}{6}z+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{6}(x+y+z) \end{cases} \tag{3}$$

易見, 這是一個不定方程問題。斐波納契給出了一組特殊解。設 $x+y+z=t$, 又設

$$u=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)$$

斐波納契稱之爲 "物" (posui rem)。由方程組 (3) 可得

$$\begin{cases} x=t-2u \\ y=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}u \\ z=\frac{1}{5}t-\frac{6}{5}u \end{cases}$$

因此得 $x+y+z=t=\frac{17}{10}t-\frac{47}{10}u$, $7t=47u$。設 $u=7$, 即得

$$t=47, \quad x=33, \quad y=13, \quad z=1$$

「花朵」中的另一個三元問題是適定的, 相當於求解方程組

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{3}(x_2+x_3)=14 \\ x_2+\frac{1}{4}(x_3+x_1)=17 \\ x_3+\frac{1}{5}(x_1+x_2)=19 \end{cases} \tag{4}$$

斐波納契將 x_2+x_3 當作未知數, 我們設

$$x_2+x_3=z \tag{4-1}$$

則斐波納契的解法相當於: 由 (4) 中第一個方程得

$$x_1=14-\frac{1}{3}z \tag{4-2}$$

故

$$x_1+x_2+x_3=14+\frac{2}{3}z \tag{4-3}$$

分別與 (4) 中第二個和第三個方程相減得

$$x_3 + x_1 = \frac{8}{9}z - 4 \tag{4-4}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{6}z - \frac{25}{4} \tag{4-5}$$

從 (4-1)、(4-4) 和 (4-5) 得

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 2\frac{13}{18}z - 10\frac{1}{4}$$

即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1\frac{13}{36}z - 5\frac{1}{8} \tag{4-6}$$

由 (4-1)、(4-2) 和 (4-6) 得

$$x_1 = \frac{13}{36}z - 5\frac{1}{8} = 14 - \frac{1}{3}z$$

因此 $z = 27\frac{27}{50}$, 從而得

$$x_1 = 4\frac{41}{50}, \quad x_2 = 11\frac{44}{50}, \quad x_3 = 15\frac{33}{50}$$

斐波納契對皇帝弗雷德裡克二世這樣說: “您知道, 我在我的書 (「計算之書」) 中第13章已經用兩種不同的方法解決了這個問題, 但在我看來這個新解法比別的方法更好, 因此願傳給陛下。”

根據斐波納契自己的說法, 「花朵」 第二部分是根據一個朋友的請求寫的, 這位朋友想瞭解關於 “買鳥問題” 以及別的類似問題的解法。“買鳥問題” 原載斐波納契寫給泰奧多魯斯的一封信中。問題如下:

> 今有人買麻雀、斑鳩和鴿子, 30 個錢幣共買30只鳥。麻雀3只值1個錢幣, 斑鳩 2 只值 1 個錢幣, 鴿子 1 只值 2 個錢幣。問三種鳥各買幾隻?

問題相當於解不定方程組

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30 \\ x + y + z = 30 \end{cases} \tag{5}$$

斐波納契解法的譯文見文獻 [4]。相當於將 $x = 30 - y - z$ 代入第一個方程得

$$\frac{1}{3}(30 - y - z) + \frac{1}{2}y + 2z = 10 + \frac{1}{6}y + \frac{5}{3}z = 30$$

因此, 斐波納契將問題轉化爲求正整數 y 和 z, 滿足

$$\frac{1}{6}y + \frac{5}{3}z = \frac{y + 10z}{6} = 20, \quad y + z < 30.$$

於是

$$y + 10z = 120, \quad y + z < 30$$

故得唯一的正整數解 $y = 10$, $z = 11$, 從而得 $x = 9$。

把題中的30換成29, 則問題轉化爲求正整數 y 和 z, 滿足 $y+10z = 116$, 且 $y+z < 29$。斐波納契給出兩組正確的解: $x = 12$, $y = 11$, $z = 6$ 以及 $x = 3$, $y = 16$, $z = 10$。將30換成15, 斐波納契證明這個問題只有分數解: $x = 4\frac{1}{2}$, $y = 5\frac{1}{2}$、$z = 5$。但若將錢幣數換成16 (鳥的數目仍爲15), 則問題又有整數解。

4. 四元一次方程組問題

下面的四元問題是斐波納契題獻給紅衣主教 Ranieri 的:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) = 33 \\ x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = 35 \\ x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = 36 \\ x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) = 37 \end{cases} \tag{6}$$

斐波納契證明這個方程組沒有正數解。與方程 (4) 的解法相似, 他把 $x_2 + x_3 + x_4$ 看成未知數, 我們設

$$x_2 + x_3 + x_4 = z \tag{6-1}$$

於是由 (6) 的第一個方程得

$$x_1 = 33 - \frac{1}{2}z \tag{6-2}$$

從而得

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33 + \frac{1}{2}z \tag{6-3}$$

分別與 (6) 的第二、三、四個方程相減得

$$x_3 + x_4 + x_1 = \frac{3}{4}z - 3 \tag{6-4}$$

$$x_4 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3}z - 4 \tag{6-5}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8}z - 5 \tag{6-6}$$

由 (6-1)、(6-4)、(6-5) 和 (6-6) 得

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 3\frac{1}{24}z - 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\frac{1}{72}z - 4 \tag{6-7}$$

由 (6-1)、(6-2) 和 (6-7) 得

$$x_1=\frac{1}{72}z-4=33-\frac{1}{2}z$$

故得

$$z=72,\quad x_1+36=33$$

斐波納契因此得出: 方程是沒有解的, 除非第一個人欠債3個硬幣, 用今天的話來說, 即 $x_1=-3$, 由此又易得 $x_2=18$, $x_3=25$, $x_4=29$。

斐波納契接著說, 如果將 (6) 中諸方程中的常數分別換成 181、183、184 和 185, 那麼方程組的解為 $x_1=1$, $x_2=94$, $x_3=105$, $x_4=141$。

顯然, 方程組 (4) 和 (6) 的解法適用於更一般的方程組

$$\begin{cases} x_1+a_1(x_2+x_3+\cdots+x_n)=b_1\\ x_2+a_2(x_3+x_4+\cdots+x_1)=b_2\\ x_3+a_3(x_4+x_5+\cdots+x_2)=b_3\\ \qquad\qquad\vdots\\ x_n+a_n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})=b_n \end{cases}$$

在「花朵」第一部分的最後, 斐波納契給出的問題相當於求四元不定方程組

$$5(x_1-x_2)=2(x_2-x_3)=3(x_3-x_4)=4(x_4-x_1+x_2) \tag{7}$$

當各部分等於60時, 斐波納契解得 $x_1=89$, $x_2=77$, $x_3=47$, $x_4=27$。

5. 五元一次方程組問題

在「花朵」的第一部分中, 斐波納契還解決了兩個五元問題, 這兩個問題是他通過一個叫 Robert 的人傳給皇帝的。第一個問題相當於求五個未知數 x_i $(i=1,2,3,4,5)$, 使得

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4)=17\\ x_2+\frac{1}{3}(x_3+x_4+x_5)=17\\ x_3+\frac{1}{4}(x_4+x_5+x_1)=17\\ x_4+\frac{1}{5}(x_5+x_1+x_2)=17\\ x_5+\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3)=17 \end{cases} \tag{8}$$

與 (4) 和 (6) 的解法不同, 這次斐波納契將 x_1 和 x_5 當作未知數, 分別稱其為 $causa$ 和 res。解法如下:

由 (8) 中的第一個方程得:

$$x_2 + x_3 + x_4 = 34 - 2x_1 \tag{8-1}$$

從而得

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34 - 2x_1 + x_5 \tag{8-2}$$

與 (8) 中第二個方程相減得

$$x_3 + x_4 + x_5 = 25 + \frac{1}{2} - 3x_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x_5 \tag{8-3}$$

(8-2) 和 (8-3) 相減得

$$x_2 = 8 + \frac{1}{2} + x_1 - \frac{1}{2}x_5 \tag{8-4}$$

由 (8-3) 得

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_1 = 25 + \frac{1}{2} - 2x_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x_5 \tag{8-5}$$

與 (8) 的第三個方程相減得

$$x_4 + x_5 + x_1 = 11 + \frac{1}{3} - \left(2 + \frac{2}{3}\right) x_1 + 2x_5 \tag{8-6}$$

由 (8-5) 和 (8-6) 相減得

$$x_3 = 14 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_5 \tag{8-7}$$

又由 (8-6) 得

$$x_4 = 11 + \frac{1}{3} - \left(3 + \frac{2}{3}\right) x_1 + x_5 \tag{8-8}$$

由 (8-4) 得

$$x_5 + x_1 + x_2 = 8 + \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}x_5,$$
$$\frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 1 + \frac{7}{10} + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_5,$$

與 (8-8) 相加得

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 13 + \frac{1}{30} - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 + \left(1 + \frac{1}{10}\right) x_5$$

故由 (8) 中第四個方程得

$$x_5 = \left(3 - \frac{1}{33}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33} \tag{8-9}$$

由 (8-4) 和 (8-7) 得

$$x_1+x_2+x_3=22+\frac{2}{3}+\left(2+\frac{2}{3}\right)x_1-x_5,$$
$$\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3)=3+\frac{7}{9}+\frac{4}{9}x_1-\frac{1}{6}x_5,$$

由 (8) 中第五個方程得

$$3+\frac{7}{9}+\frac{4}{9}x_1+\frac{5}{6}x_5=17$$
$$\frac{8}{15}x_1+x_5=15+\frac{13}{15}, \tag{8-10}$$

將 (8-9) 代入得

$$x_1=3+\frac{1}{2}$$

由 (8-4)、(8-7)、(8-8) 和 (8-9) 得

$$2x_1=7,\quad 2x_2=10,\quad 2x_3=19,\quad 2x_4=25,\quad 2x_5=28$$

第二個問題是求五個未知數 x_1, x_2, x_3, x_4 和 t, 使得

$$\begin{cases} t+x_1=2(x_2+x_3)\\ t+x_2=3(x_3+x_4)\\ t+x_3=4(x_4+x_1)\\ t+x_4=5(x_1+x_2)\end{cases} \tag{9}$$

斐波納契將 t 稱作 *bursa*, 將 x_1 稱作 *dragma*, 將 x_2 稱作 *res*。他說, 除非第一個人是欠債的 (用我們今天的話說, 即 x_1 爲負數), 否則該問題是無解的。因爲從方程組可以推得

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)x_2+\left(6+\frac{3}{5}\right)x_1=\left(3-\frac{1}{13}\right)x_2+\frac{9}{13}x_1$$

但這個方程沒有正數解, 因爲 $4+\frac{2}{5}>3-\frac{1}{13}$, $6+\frac{3}{5}>\frac{9}{13}$。若允許第一個人欠債, 斐波納契得到一組特殊解

$$x_1=-1,\quad x_2=4,\quad x_3=1,\quad x_4=4,\quad t=11$$

斐波納契還把上述問題推廣到更一般的情形, 即

$$\begin{cases} t+x_1=a(x_2+x_3)\\ t+x_2=(a+1)(x_3+x_4)\\ t+x_3=(a+2)(x_4+x_1)\\ t+x_4=(a+3)(x_1+x_2)\end{cases} \tag{10}$$

斐波納契取

$$x_1 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = x_4 = a+2, \quad t = a^2 + 3a + 1$$

「花朵」第二部分在前面介紹過的幾何問題之後, 斐波納契又回到了代數問題上來: 求五個未知數 x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 使得

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 12 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 15 \\ x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 18 \\ x_4 + \frac{1}{5}x_5 = 20 \\ x_5 + \frac{1}{6}x_1 = 23 \end{cases} \tag{11}$$

斐波納契的解法是:

$$x_1 = 12 - \frac{1}{2}\left(15 - \frac{1}{3}\left(18 - \frac{1}{4}\left(20 - \frac{1}{5}\left(23 - \frac{1}{6}x_1\right)\right)\right)\right), \quad x_1 = 6\frac{612}{721}$$

從而得

$$x_2 = 10\frac{218}{721}, \quad x_3 = 14\frac{43}{721}, \quad x_4 = 15\frac{453}{721}, \quad x_5 = 21\frac{619}{721}.$$

6. 三元二次不定方程組問題

這是 Johannes 向他提出的第一個問題: 求一個有理數 x, 使得 $x^2 + 5$ 和 $x^2 - 5$ 都是有理數的平方。這相當於求解三元二次不定方程組

$$\begin{cases} z^2 + 5 = x^2 \\ x^2 + 5 = y^2 \end{cases} \tag{12}$$

斐波納契的解答是 $x = \frac{41}{12}$, $y = \frac{49}{12}$, $z = \frac{31}{12}$。弗格爾說人們不知道斐波納契是如何得到這個結果的, 但我們可以從「平方數之書」中尋找線索。正是 Johannes 的三平方問題促使斐波納契寫成「平方數之書」。在該書中, 斐波納契著重解決如下問題:

> 求三個不同的平方數和另一個數, 使得: 將該數加到較小的平方數上, 得中間那個平方數; 將該數加到中間那個平方數上, 得較大的平方數。

即求四個未知數 x, y, z 和 s, 使得 $z^2 + s = x^2$, $x^2 + s = y^2$。顯然, 斐波納契把 Johannes 的問題作了推廣。他考慮一個連續奇數列

$$2a^2 - 3, 2a^2 - 1, \ldots, 2a^2 + 4a + 3, 2a^2 + 4a + 5, \ldots, 2a^2 + 8a + 3$$

其中前 $2a+4$ 項和後 $2a$ 項的和均爲 $4a(a+1)(a+2)$, 即

$$(2a^2-3)+(2a^2-1)+\cdots+(2a^2+4a+3)=4a(a+1)(a+2),$$
$$(2a^2+4a+5)+(2a^2+4a+7)+\cdots+(2a^2+8a+3)=4a(a+1)(a+2).$$

但

$$1+3+5+\cdots+(2a^2-5)=(a^2-2)^2,$$
$$1+3+5+\cdots+(2a^2+4a+3)=(a^2+2a+2)^2,$$
$$1+3+5+\cdots+(2a^2+8a+3)=(a^2+4a+2)^2,$$

因此, 斐波納契求得了滿足條件的小、中、大三數 z、x、y 和另一個數 s:

$$z=a^2-2,\quad x=a^2+2a+2,\quad y=a^2+4a+2,\quad s=4a(a+1)(a+2).$$

現在我們來看 Johannes 的問題。將 (12) 化成

$$\begin{cases}(zu)^2+5u^2=(xu)^2\\(xu)^2+5u^2=(yu)^2\end{cases}$$

令 $5u^2=s=4a(a+1)(a+2)$, 易知, 上述方程的最小正整數解爲 $a=8$, $u=24$。於是

$$zu=a^2-2=62,\quad xu=a^2+2a+2=82,\quad yu=a^2+4a+2=98$$

故得

$$x=\frac{41}{12},\quad y=\frac{49}{12},\quad z=\frac{31}{12}.$$

斐波納契對於歐幾裡得「幾何原本」以及花拉子米、阿布 · 卡米爾 (Abu Kamil, 850～930)、阿爾·卡克希 (Al-Karkhi, 953～1029) 等阿拉伯數學家的有關數學著作都十分熟悉,「花朵」以及其他著作中的一些問題甚至直接取自這些著作。另一方面, 斐波納契的 “買鳥問題” (5) 與中國「張丘建算經」中的 “百雞問題” 相似; 斐波納契的方程 (2), 正如英國科學史家李約瑟 (J. Needham, 1900～1995) 曾指出的那樣, 具有典型的中國特徵 [4]; 而方程組 (11) 與中國「九章算術」中的 “五家共井” 問題也有著相似性, 後者相當於

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{2}t\\x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{1}{3}t\\x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{1}{4}t\\x_4+\frac{1}{5}x_5=\frac{1}{5}t\\x_5+\frac{1}{6}x_1=\frac{1}{6}t\end{cases}$$

其中 t 爲井深, 儘管它是適定的。因此, 只有通過研究中國和阿拉伯的數學交流才能確切瞭解中國數學在中世紀的西傳情況。

參考文獻

1. K. Vogel. Fibonacci, Leonardo, of Pisa. Dictionary of Scientific Biography, 604-613
2. O. Terquem. Tre Scritti inediti Leonardo Pisano, pubblicati da Baldassare Boncompagni secondo la lezione di un codice della Biblioteca ambrosiana di Milano. Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématique, 1856, 2: 1-11; 42-71
3. D. E. Smith. History of Mathematics. Boston: Ginn and Company, 1923. 198-200.
4. 李文林。數學珍寶。北京: 科學出版社, 1998. 201-201。
5. 李約瑟。中國數學中的霍納法 (劉鈍譯)。見潘吉星主編: 李約瑟文集, 瀋陽: 遼寧科學技術出版社, 1986. 401-458。

—作者現在任教於華東師範大學數學系—