一個題目多種解法——談排列組合的教學

陳世傑

一. 引言

在二十八卷二期的數學傳播 (93年6月), 李政豐老師的「組合計數的方法兩則」一文中, 提出了兩個「不盡相異物排列」的題目, 透過實驗與分析的方法, 發現背後有著排容原理與狄摩根定律。但針對於其原始問題:『白球2個, 黑球2個, 黃球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少? 』筆者認爲透過排容原理與狄摩根定律來處理, 不僅「大費周章」, 而且由於列式的繁複, 使得題目與解法之間, 隔了一層薄紗, 讓人在抽象的計算中, 無法直觀地洞察問題的關鍵。

二、本文

從教學策略來看, 我同意李老師先減少球數來嘗試, 以掌握這類題目的計數法則, 關鍵在於能否從小數量的同類題型中, 找到有效的處理方法。李老師認爲幕後黑手是『排容原理與狄摩根定律』, 這是運用反面的手法, 對於推廣到一般化確實很有幫助。然而從正面下手, 透過適當的分類, 運用加法原理與基本公式, 我認爲是更直觀, 且適合學生能力的處理方法。以排列組合的教學眼光來看, 正面處理能在學生的腦海中, 呈現具體清楚的形象, 使他們能夠運用基本的公式來求解。

首先, 減少球數來嘗試。

引導問題1: 白球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?

把拿球順序轉換成4顆球的不盡相異物排列。

$$(紅, 紅, 白, 白)\ ;\ (紅, 白, 紅, 白)\ ;\ (白, 紅, 紅, 白)$$

共有3種排列都是紅球先取完。而總排列數是 $\frac{4!}{2!2!}$ 種, 所以機率$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, 是符合直觀的答案。

其次, 再試著增加球數。

引導問題2: 白球2個, 黑球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?

先嘗試可能的排法, 如下:

(紅, 紅, 黑, 黑, 白, 白) ; (紅, 白, 紅, 黑, 黑, 白) ; (紅, 黑, 白, 紅, 黑, 白) $\cdots$ 等

都算是「紅球先取完的不盡相異物排列」。

進一步觀察, 我們注意到—『第二個紅球前不能出現兩個同色球』因此, 第二紅球前最少是1紅球, 再來則是 1 紅 1 黑或 1 紅 1 白的排列; 而最多最多可以出現 1 紅 1 黑 1 白共三球的排列。

依序計算如下:

第二紅球前只有一球的排列數: $\frac{4!}{2!2!}=6$

第二紅球前恰有二球的排列數: $C^2_1 2!\frac{3!}{2!}=12$

第二紅球前恰有三球的排列數: $C^2_2 3!\times 2!=12$

共有 $6+12+12=30$ 種先取完紅球的排列數。總排列數 $=\frac{6!}{2!2!2!}=90$, 所以機率爲 $\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$。

最後, 回到原始問題:『白球2個, 黑球2個, 黃球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少? 』

我們重複上面的思考列出如下算式, 先算出先取完紅球的排列數

$$\frac{6!}{2!2!2!}+C^3_1 2!\frac{5!}{2!2!}+C^3_2 3!\frac{4!}{2!}+C^3_3 4!3!=630$$

總排列數爲 $\frac{8!}{2!2!2!2!}=2520$, 於是問題的答案: $P=\frac{630}{2520}=\frac{1}{4}$。

從引導問題到原問題的解決, 我們可以發現每增加兩個同色球, 機率便從 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ 依序遞減至 $\frac{1}{4}$。接著的疑問便是:『若 2 個同色球一組, 共有異色的 n 組球, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問某特定色球先取完的機率是多少? 』合理的猜想應是 $\frac{1}{n}$。至於證明從正面來處理, 將遭遇許多困難, 若應用『排容原理與狄摩根定律』就簡單許多, 這是李老師「組合計數的方法兩則」一文的貢獻。不過單單從教學方法來看, 本文正面處理的手法, 對於高中學生在排列組合的學習, 是較有幫助的。

參考文獻

1. 李政豐 (2004) , 組合計數的方法兩則, 數學傳播 28 卷 2 期 (民 93 年 6 月) 。

—本文作者任教於國立桃園高中—