如何衍生 Machin 型公式

黃見利

1. 前言

所謂 Machin 型公式爲型式如 $k\frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{l} f_i \times \tan^{-1}(\frac{1}{m_i})$ 的反正切三角恆等式, 其中 $|f_i|$, k, l 和 m_i 皆爲正整數。

在1976年之前, 所有創紀錄的圓周率數值之計算完全是依賴 Machin 型公式; 其中以 Machin 在1706年發現的公式 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}(\frac{1}{5}) - \tan^{-1}(\frac{1}{239})$ 最爲有名 [5]。即使在1983年, 日本東京大學金田康正教授及其團隊將圓周率數值計算至 2^{24} (16,777,216) 小數位時是利用 Gauss-Legendre-Brent-Salamin 演算法作爲主程式的計算, 但在檢驗數值時, 依然是利用 Gauss 死後8年才發表的公式 $\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}(\frac{1}{18}) + 8\tan^{-1}(\frac{1}{57}) - 5\tan^{-1}(\frac{1}{239})$ [5]。此後的二十年間, 所有的計算完全是以 Gauss-Legendre-Brent-Salamin 演算法及 Borwein 第4階收斂演算法爲主, 偶而也使用 Chudnovsky 的 Ramanujan 型公式。在2002年的12月6日, 金田康正教授及其另一團隊利用一台日立 SR8000/MPP 超級電腦將圓周率數值計算至不可思議的 1,241,100,000,000 位小數。不過, 和以往不同的是, 這一次基於電腦速度, 效率, 記憶體和運算等因素交互作用的通盤考量 [1], 他決定使用下述一對 Machin 型公式來完成破紀錄的計算:

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\left(\frac{1}{49}\right) + 32\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) - 5\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) + 12\tan^{-1}\left(\frac{1}{110443}\right)$$

和

$$\frac{\pi}{4} = 44\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) + 7\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) - 12\tan^{-1}\left(\frac{1}{682}\right) + 24\tan^{-1}\left(\frac{1}{12943}\right).$$

其中第一條公式作爲計算用, 第二條公式則作爲檢驗用 [15]。

在此必須說明的是, 金田康正教授將第一條公式的發現歸給高野喜久雄先生 (1982年)。本文作者亦在1994年獨立地發現此公式 [4]。第二條公式則是 Störmer 在1896年所發現 [10, 85頁]。事實上, 如果將第一條公式換成另一條亦是 Sörmer 在1896年所發現的公式

$$\frac{\pi}{4} = 88\tan^{-1}\left(\frac{1}{172}\right) + 51\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) + 32\tan^{-1}\left(\frac{1}{682}\right) + 44\tan^{-1}\left(\frac{1}{5357}\right) + 68\tan^{-1}\left(\frac{1}{12943}\right)$$

則計算速度將會更快。此一公式對爲本文作者在1996年所發現。

在本文中, 我們提出一個衍生 Machin 型公式的方法並且給了一些非常有效率的公式對作爲計算圓周率數值之用。我們同時提出兩個猜測。爲了簡潔和易於明瞭, 我們使用下述符號於以後的全文中: $\{m\} = \cot^{-1}(m) = \tan^{-1}(\frac{1}{m})$, x 爲一整數。因此, Machin 型公式和 Gauss 的公式將分別被表示成 $k\{1\} = \sum_{i=1}^{l} f_i \times \{m_i\}$ 和 $\{1\} = 12\{18\} + 8\{57\} - 5\{239\}$。

2. 反餘切三角函數值之分解 (REDUCTION)

在他的1949年的論文中 [12], John Todd 描述了一個非常美麗的過程, 可用來分解較大的反餘切三角函數值成爲一些較小的反餘切三角函數值之和。設 m 爲一正整數, 我們稱 $\{m\} = \sum_{i=1}^{l} f_i \times \{m_i\}$ 此種形式表示爲 $\{m\}$ 之分解, 其中 $|f_i|$ 和 l 爲正整數而且每一 m_i 爲小於 m 之正整數。此種表示法爲唯一。如果此種分解表示存在, 我們稱 $\{m\}$ 爲可分解的反餘切三角函數值 (reducible), 否則爲不可分解的反餘切三角函數值 (irreducible)。

我們從論文中的 Theorem B 可知, $\{x\}$ 爲不可分解的反餘切三角函數值若且唯若 $x^2 + 1$ 的最大質因數不小於 $2x$。由於 Theorem B 是由論文中的 Theorem A 所推論而得, 而 Theorem A 之證明極爲繁瑣和冗長, 限於篇幅的關係, 我們不打算在此重新證明它們。因此 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{9\}$, $\{10\}$, $\{11\}$ 等等, 皆爲不可分解的反餘切三角函數值。Todd 同時也證明了不可分解的反餘切三角函數值和形如 $4k+1$ 的質數之間存在著一對一的對應。故 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{9\}$, $\{10\}$, $\{11\}$ 等等, 分別對應到 2, 5, 17, 13, 37, 41, 101, 61, 等等。但 $\{3\}$, $\{7\}$, 和 $\{8\}$ 等等則是可分解的反餘切三角函數值: $\{3\} = \{1\} - \{2\}$, $\{7\} = -\{1\} + 2\{2\}$, $\{8\} = \{1\} - \{2\} - \{5\}$。同樣地, Machin 的公式事實上即是 $\{239\}$ 的分解。這些分解顯示了一個共同的性質, 即是等號左邊的反餘切三角函數值大於等號右邊的任一反餘切三角函數值。

本文重心雖著眼於衍生 Machin 型公式, 但是如何分解反餘切三角函數值卻是關鍵。Todd 的論文 (522頁至523頁) 當中的兩個實例對於了解反餘切三角函數值的分解過程有非常大的幫助。我們在此亦舉一實例以增加讀者的了解。

將 $\{N\}$ 分解爲帶有正負符號的不可分解的反餘切三角函數值 $\{I1\}$, $\{I2\}$ 等的總和等價於將複數 $(N+j)$ 分解爲 $(I1 \pm j)$, $(I2 \pm j)$ 等複數 "因數" 的乘積。每分解出一個 "因數" 後, "剩餘複數" $(X \pm jY)$ 之 (X^2+Y^2) 值將會不斷地減少。

假設 $N = 32085$。最初的剩餘複數爲 $(32085 + j)$。

(1) 找出剩餘複數 $(X \pm jY)$ 之 (X^2+Y^2) 值之最大質因數 P, 從而決定相對應之不可分解的反餘切三角函數值

$(32085+j)$ 之 (X^2+Y^2) 值爲 $32085^2+1=1029447226$, 其最大質因數爲 $P=829$, 而相對應之不可分解的反餘切三角函數值爲 $\{246\}$。亦即, $I=246$ 爲使得829能整除 (I^2+1) 的最小正整數。故 $\{246\}$ 出現在分解過程中。

(2) 決定不可分解的反餘切三角函數值的符號

假設剩餘複數爲 $(X\pm jY)$ 而相對應之不可分解的反餘切三角函數值爲 $\{I\}$。如果 $(X\pm YI)$ 能被 P 整除 (或爲零), 則 $\{I\}$ 的符號爲 “$-$”; 否則爲 “$+$”。最初, 剩餘複數爲 $(X\pm jY)=(32085+j)$; 故 $(X\pm YI)=32085+246=32331$, 能被829整除, 所以 $\{246\}$ 的符號爲 “$-$”。

(3) 計算新的剩餘複數

將目前的剩餘複數 $(X\pm jY)$ 乘上 $(I+j)$ 或 $(I-j)$, 端視 $\{I\}$ 的符號爲 “$-$” 或 “$+$”。然後, 在此乘積中, 將實部和虛部的共同因數除去 (當然包含有 P)。

最初, 乘積爲

$$\begin{aligned}(32085+j)*(246+j)&=((32085*246-1)+j(32085+246))\\&=(7892909+32331j)=(829*9521+829*39j).\end{aligned}$$

因此, 新的剩餘複數 $(X\pm jY)$ 爲 $(9521+39j)$。

重複步驟 (1), (2) 和 (3) 直到 X 或 Y 爲零, 或者直到 Y 爲1而 $\{X\}$ 爲不可分解的反餘切三角函數值, 此時我們即完成了分解的工作。

當 X 和 Y 兩者皆爲1時 (符號可能相同或相反), 分解的過程會有 $\{1\}$ 產生, 它所伴隨的整數係數可能不定, 因此其係數必須調整至能確保分解後的等式平衡。

因此 (繼續上例):

(1) $9521^2+39^2=90650962=173*97*73*37*2$; $P=173$, $I=80$。

(2) $9521+39.80=12641$, 不能被173整除, 故下一個爲 $+\{80\}$。

(3) $(9521+39j)*(80-j)=(173*37*119-173*37j)$, 因此新的剩餘複數爲 $(119-j)$。

(1) $119^2+1=14162=97*73*2$; $P=97$, $I=22$。

(2) $119-22$ 可被97整除, 故下一個爲 $-\{22\}$。

(3) $(119-j)*(22+j)=(97*27+97j)$, 因此新的剩餘複數爲 $(27+j)$。

$\{27\}$ 爲一不可分解的反餘切三角函數值, 故 $\{27\}$ 出現在分解之中; 步驟 (2) 決定了其符號爲 “$+$”。

因此, 完全的分解爲 $\{32085\}=-\{22\}+\{27\}+\{80\}-\{246\}$。

在此要注意的是, 步驟 (1) 中, 如果 P (>2) 的次方大於1時, 相對應之不可分解的反餘切三角函數值必須乘上此次方值。步驟 (1) 和 (2) 僅只執行一次來分解出某一不可分解的反餘切三角函數值, 但步驟 (3) 必須適當地重複執行。

3. 基底和線性方程系統

一開始, 我們給了三個反餘切三角函數值的分解:

$$\{8\} = \{1\} - \{2\} - \{5\} \tag{1.1}$$

$$\{57\} = -2\{1\} + 3\{2\} + \{5\} \tag{1.2}$$

$$\{239\} = -\{1\} + 4\{5\} \tag{1.3}$$

現在令

$$B = \{\{x\} \mid \{x\} \text{ 爲不可分解的反餘切三角函數值}\}$$

和

$$G = \{\cot^{-1}(y) \mid y \text{ 爲有理數}\}.$$

則 G 不僅爲一無限 abelian 加法群, 亦爲一具有基底 B 的無限生成自由 abelian 群。因此, 由 Nielsen-Schreier 定理可知, 存在一具有基底 $C \subset B$ 有限生成自由 abelian 群 $H \subset G$。

又令 $C = \{\{1\}, \{2\}, \{5\}\}$。則 (1.1), (1.2) 和 (1.3) 形成一線性方程系統且

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{2\} \\ \{5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{8\} \\ \{57\} \\ \{239\} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{2\} \\ \{5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{8\} \\ \{57\} \\ \{239\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{1\} = 6\{8\} + 2\{57\} + \{239\}.$$

我們在此衍生了 Störmer 於1896年發現的公式, 曾經在1961年被 Shanks 和 Wrench 用來計算圓周率數值至十萬位 [9]。在1973年, Guilloud 和 Bouyer 計算圓周率數值至一百萬位時, 即是利用此公式作爲檢驗之用 [5]。

假設我們有了

$$\{18\} = \{1\} - 2\{2\} + \{5\}, \tag{1.4}$$

則 (1.4), (1.2) 和 (1.3) 亦形成一線性方程系統且

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{2\} \\ \{5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{18\} \\ \{57\} \\ \{239\} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{2\} \\ \{5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & -5 \\ 7 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{18\} \\ \{57\} \\ \{239\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{1\} = 12\{18\} + 8\{57\} - 5\{239\}.$$

這即是 Gauss 的著名公式, 1973年被 Guilloud 和 Bouyer 作爲計算圓周率數值主程式公式之用, 1983年則被金田康正教授作爲數值檢驗之用 [5]。

4. 測度值 (MEASURE) 和最佳公式 (OPTIMAL IDENTITY)

在1983年之前, 搜尋 "好的" 或 "有效率的" Machin 型公式是一件重要的數學工作。但是, 何謂 "好的" 或 "有效率的"公式? 在1938年, D. H. Lehmer 提出 "測度值" 的概念來回答此問題 [7]。因此, 任何 Machin 型公式 $k\{1\}=\sum_{i=1}^{l} f_i\times\{m_i\}$ 其測度值爲 $\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\log_{10}(m_i)}$。因此, Machin, Gauss 和 Störmer 的公式其測度值分別爲 1.85113, 1.78661 和 2.09728。

由此可知, 當我們使用某一條 Machin 型公式, 經由 Gregory 級數

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1<x\le 1$$

以計算圓周率數值至特定的精確度時, 所需要的時間和項數約略和測度值成正比。這個事實表達了一項重要的訊息, 即測度值愈小, 公式就愈好。故 Gauss 的公式比 Störmer 的公式要好。更甚的是, 這兩條公式是由同一基底 $\{\{1\},\{2\},\{5\}\}$ 所衍生出來的。也就是說, 以 $\{18\}$ 取代 $\{8\}$ 後, Gauss 的公式改良了 Störmer 的公式。我們稱由某一基底所衍生出的一條公式爲最佳公式, 如果此公式法無法再被改良。令人驚奇的是, 至今我們只知道兩條最佳公式, 一是 Machin 的公式 $\{1\}=4\{5\}-\{239\}$, 其基底爲 $\{\{1\},\{5\}\}$, 另一是 Hutton 在1776年發現的公式 $\{1\}=2\{3\}+\{7\}$, 其基底爲 $\{\{1\},\{2\}\}$。此事實是由 Störmer 的工作所導出的。他研究過方程式 $c_1\tan^{-1}x_1+c_2\tan^{-1}x_2+\cdots+c_n\tan^{-1}x_n=k\frac{\pi}{4}$ 有理數解 [10], 同時也證明方程式 $m\{p\}+n\{q\}=k\{l\}$ 僅能有下列四組整數解 [11]:

k	m	p	n	q	發現者
1	1	2	1	3	Euler, 1738年
1	2	3	1	7	Hutton, 1776年
1	4	5	-1	239	Machin, 1706年
1	2	2	-1	7	Hermann, 1706年

5. 實例

在此我們給兩個實例以顯示此方法的優雅和重要。首先, 給予一組基底 $\{\{1\},\{2\},\{5\},\{49\},\{107\},\{109\}\}$, 我們選出六個合適的反餘切三角函數值:

$$\{239\}=-\{1\}+4\{5\}$$
$$\{1023\}=2\{1\}-3\{2\}-\{5\}+\{107\}+\{109\}$$

$$\begin{aligned}
\{5832\} &= \{107\} - \{109\} \\
\{110443\} &= 5\{1\} - 8\{2\} - \{5\} - \{49\} \\
\{4841182\} &= -5\{1\} + 9\{2\} - \{5\} - \{49\} - 3\{107\} \\
\{6826318\} &= -3\{2\} + 7\{5\} + \{109\}
\end{aligned}$$

則

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -8 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{2\} \\ \{5\} \\ \{49\} \\ \{107\} \\ \{109\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{239\} \\ \{1023\} \\ \{5832\} \\ \{110443\} \\ \{4841182\} \\ \{6826318\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{2\} \\ \{5\} \\ \{49\} \\ \{107\} \\ \{109\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183 & 32 & -68 & 12 & -12 & -100 \\ 108 & 19 & -40 & 7 & -7 & -59 \\ 46 & 8 & -17 & 3 & -3 & -25 \\ 5 & 0 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{239\} \\ \{1023\} \\ \{5832\} \\ \{110443\} \\ \{4841182\} \\ \{6826318\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \{1\} = {} & 183\{239\} + 32\{1023\} - 68\{5832\} + 12\{110443\} - 12\{4841182\} \\
& -100\{6826318\}.
\end{aligned}$$

本文作者在1994年發現此公式 [13, 5], 其測度値爲 1.51244。

其次, 另給一組基底 $\{\{1\},\{2\},\{4\},\{5\},\{6\},\{9\},\{11\},\{12\},\{23\}\}$, 我們也選出九個合適的反餘切三角函數值:

$$\begin{aligned}
\{5257\} &= -2\{1\} + 2\{2\} + \{4\} + \{5\} + \{9\} + \{11\} \\
\{9466\} &= \{1\} - \{2\} - 3\{6\} + \{11\} + \{12\} \\
\{12943\} &= 3\{1\} - 4\{2\} - 3\{5\} + \{11\} \\
\{34208\} &= -2\{1\} + 2\{2\} + \{4\} + 2\{5\} - \{12\} + 2\{23\} \\
\{44179\} &= \{1\} - 2\{2\} - 2\{4\} + 3\{5\} + \{12\} - \{23\} \\
\{85353\} &= \{1\} - \{4\} - \{5\} - \{6\} - 2\{9\} + \{23\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{114669\} &= \{1\}+2\{2\}+\{4\}+\{6\}-2\{11\}-2\{23\}\\
\{330182\} &= -3\{1\}+6\{2\}-\{5\}-\{6\}+\{9\}-\{11\}-\{12\}\\
\{485298\} &= 3\{1\}-4\{2\}-4\{5\}+\{6\}+2\{12\}-\{23\}.
\end{aligned}$$

則

$$\begin{bmatrix}
-2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0\\
3 & -4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\
1 & -2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\
1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\\
1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2\\
-3 & 6 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
3 & -4 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\{1\}\\ \{2\}\\ \{4\}\\ \{5\}\\ \{6\}\\ \{9\}\\ \{11\}\\ \{12\}\\ \{23\}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}\{5257\}\\ \{9466\}\\ \{12943\}\\ \{34208\}\\ \{44179\}\\ \{85353\}\\ \{114669\}\\ \{330182\}\\ \{485298\}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow
\begin{bmatrix}\{1\}\\ \{2\}\\ \{4\}\\ \{5\}\\ \{6\}\\ \{9\}\\ \{11\}\\ \{12\}\\ \{23\}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2805 & -398 & 1950 & 1850 & 2021 & 2097 & 1484 & 1389 & 808\\
1656 & -235 & 1151 & 1092 & 1193 & 1238 & 876 & 820 & 477\\
875 & -124 & 608 & 577 & 630 & 654 & 463 & 433 & 252\\
705 & -100 & 490 & 465 & 508 & 527 & 373 & 349 & 203\\
590 & -84 & 410 & 389 & 425 & 441 & 312 & 292 & 170\\
395 & -56 & 275 & 261 & 285 & 295 & 209 & 196 & 114\\
324 & -46 & 225 & 213 & 233 & 242 & 171 & 160 & 93\\
297 & -42 & 206 & 196 & 214 & 222 & 157 & 147 & 86\\
155 & -22 & 108 & 103 & 112 & 116 & 82 & 77 & 45
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\{5257\}\\ \{9466\}\\ \{12943\}\\ \{34208\}\\ \{44179\}\\ \{85353\}\\ \{114669\}\\ \{330182\}\\ \{485298\}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \{1\} = {}& 2805\{5257\}-398\{9466\}+1950\{12943\}+1850\{34208\}+2021\{44179\}\\
&+2097\{85353\}+1484\{114669\}+1389\{330182\}+808\{485298\}.
\end{aligned}$$

這是 Gauss 的另一著名公式, 也是在1863年發表。其測度值爲 1.95679 [3]。

6. 反餘切三角函數值的資料庫

爲了找出和選擇合適的反餘切三角函數值來衍生 Machin 型公式, 本文作者的恩師 M. Wetherfield 設計了一套非常有效率的軟體 (稱爲 Machination) 用來協助他和本文作者搜尋

新的公式。經由國立臺灣大學數學系電算中心的個人電腦和將近一年的時間, Wetherfield 和作者建構了一個具有3,247個不可分解的反餘切三角函數值檔案的資料庫, 而且一直在擴充中。

在每一個檔案中, $\{x\}$ 的搜尋範圍由 $\{2\}$ 到 $\{999,999,999,999\}$。特別是, 某些 “重要的” 檔案似乎更容易找到合適的反餘切三角函數值用來產生 “好的” 或 “有效率的” 公式, 其搜尋範圍更是被擴張至 $\{19,999,999,999,999\}$。更甚的, 許多反餘切三角函數值已經接近 $\{9,999,999,999,999,999,999\}$。

在 Machination 軟體中, 只要輸入特定的基底, 程式自己甚至可以找出和選擇合適的反餘切三角函數值來衍生公式。其原理即是利用上述的矩陣運算方法。

依據這些檔案, 我們已經 “挖掘” 出超過一億條的公式。值得注意的是, Gauss 在他的不朽巨著 Werke 中也使用了相似的原理在搜尋公式 [3], 雖然不是像我們那麼有系統和衍生出如此多。但是, 我們必須記得, 在他的時代尚未有任何電子儀器被發明出來。英國詩人 Pope 曾如此描述 Newton:

God said ‘Let Newton be!’ and all was light.

如果神後來也能順便說這句話:

God said ‘Let Gauss have a computer!’ and all are different.

則今日的世界絕對會變成大不相同!

7. 猜測

在1918年, Pólya 證明了下述的結果 [8]:

Let $f(x)$ be a non-linear polynomial of degree 2 with rational integer coefficients and has distinct roots, and let $P(x)$ denote the greatest prime factor of $f(x)$, then $P(x)\to\infty$ as $x\to\infty$.

然後, 在1935年, Chowla 證明了下述的定理 [2]:

Theorem. *If P_x denotes the greatest prime factor of x^2+1, then $P_x > c\ln\ln x$, where c is an absolute positive constant.*

最後, 跟隨著 Fields 獎得主 Baker 的工作, Keates 在1968年給了 $c=10^{-7}$ [6]。

但是, 從作者的資料庫中所有反餘切三角函數值的統計分佈所顯示出的資訊, 我們覺得 x 的上界值仍然太大了。觀察下列的數值表:

不可分解的 $\{x\}$	P_x	e^{P_x}	具有P_x, 目前所發現的最大可分解的 $\{x\}$
$\{2\}$	5	$>1*10$^2	$\{7\}$
$\{5\}$	13	$>4*10$^5	$\{239\}$
$\{4\}$	17	$>2*10$^7	$\{268\}$
$\{12\}$	29	$>3*10$^12	$\{307\}$
$\{6\}$	37	$>1*10$^16	$\{18543\}$
$\{9\}$	41	$>6*10$^17	$\{2943\}$
$\{23\}$	53	$>1*10$^23	$\{485298\}$
$\{11\}$	61	$>3*10$^26	$\{330182\}$
$\{27\}$	73	$>5*10$^31	$\{478707\}$
$\{34\}$	89	$>4*10$^38	$\{24208144\}$
$\{22\}$	97	$>1*10$^42	$\{22709274\}$
$\{10\}$	101	$>7*10$^43	$\{2189376182\}$
$\{33\}$	109	$>2*10$^47	$\{284862638\}$
$\{15\}$	113	$>1*10$^49	$\{599832943\}$
$\{37\}$	137	$>3*10$^59	$\{19696179\}$
$\{44\}$	149	$>5*10$^64	$\{314198789\}$
$\{28\}$	157	$>1*10$^68	$\{3558066693\}$
$\{80\}$	173	$>1*10$^75	$\{69971515635443\}$
$\{19\}$	181	$>4*10$^78	$\{18986886768\}$
$\{81\}$	193	$>6*10$^83	$\{18710140581\}$
$\{14\}$	197	$>3*10$^85	$\{104279454193\}$

在比較了第三行和第四行後, 我們提出下列兩個合理的猜測:

1. 設 P_x 為 x^2+1 的最大質因數, 則 $P_x>\ln x$, 亦即 $e^{P_x}>x$。
2. Gauss 的兩條公式 (測度値爲1.78661和1.95679) 在各自的基底中分別是最佳公式。

8. MACHIN 型公式的數目

在同一篇論文中 [9], Todd 證明了可分解的和不可分解的反餘切三角函數值兩者的個數皆爲無限多 (523頁)。因此, 基底 B 的維度爲無限。同時, 由下列公式, 我們可衍生出無限多條 Machin 型公式:

$$\{n\}=2\{2n\}-\{4n^3+3n\}$$

例如, Machin 的公式 $\{1\} = 4\{5\} - \{239\}$ 可衍生出 Klingenstierna 在1730年所發現的公式 $\{1\} = 8\{10\} - \{239\} - 4\{515\}$ 和 Störmer 於1896年發現的公式 $\{1\} = 4\{5\} - 2\{478\} + \{54608393\}$ 等等。但是任給一組有限維度的基底所能衍生出的 Machin 型公式卻只有有限多條。這是 Chowla-Keates 定理所產生的必然結果。

9. 最快的 MACHIN 型公式

利用下列步驟, 本文作者在2003年6月21日發現目前已知具有最低測度值 (1.50840) 的 Machin 型公式:

$$\{110443\} = \{112068\} + \{7616693\}$$
$$\{4841182\} - \{7616693\} = \{49541920807\} + \{13288972\}$$
$$\{112068\} - \{13288972\} = \{113021\} - \{102190084557\}$$
$$\{49541920807\} + \{102190084557\} = \{33366019650\} - \{43599522992503626068\}$$

因此

$$\{1\} = 183\{239\} + 32\{1023\} - 68\{5832\} + 12\{110443\} - 12\{4841182\} - 100\{6826318\}$$

可被改良爲

$$\begin{aligned}\{1\} = {} & 183\{239\} + 32\{1023\} - 68\{5832\} + 12\{113021\} - 100\{6826318\} \\ & -12\{33366019650\} + 12\{43599522992503626068\}\end{aligned}$$

10. 超級電腦計算圓周率數值所使用的 MACHIN 型公式

首先我們定義合成測度值 (compound measure)。它是被用來計算圓周率數值的一對 Machin 型公式的測度值之和, 但如果有相同的反餘切三角函數值項則只計算一次。所以金田康正公式對的測度值分別爲1.77990和1.58604, 而合成測度值爲2.37598。但是我們認爲太大了。我們給了下列更好的公式對以作爲未來計算之用。

Pair I. 合成測度值: 1.96453 (黃見利, 1995年)

$$\begin{aligned}\{1\} = {} & 581\{1252\} + 764\{2855\} + 266\{5827\} + 366\{58898\} + 195\{110443\} \\ & +537\{4841182\} - 266\{1561886607\}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\{1\} = {} & 133\{239\} + 182\{1252\} + 232\{2855\} + 100\{58898\} + 62\{110443\} \\ & +138\{4841182\}\end{aligned}$$

特別值得注意的是, Pair I 的效率比金田康正公式對多了幾近20%。事實上, 僅就合成測度值來說, 這是目前已知最好的公式對。

Pair II. 合成測度值: 1.98891 (黃見利和 Wetherfield, 1994年)

$$\begin{aligned}\{1\} &= 183\{239\}+32\{1023\}-68\{5832\}+12\{110443\}-12\{4841182\}\\ &\quad -100\{6826318\}\\ \{1\} &= 581\{1023\}+183\{5593\}+1030\{5832\}+366\{58898\}+195\{110443\}\\ &\quad +537\{4841182\}+266\{6826318\}\end{aligned}$$

Pair III. 合成測度值: 2.02687 (黃見利和 Wetherfield, 2004年)

$$\begin{aligned}\{1\} &= 183\{239\}+32\{1023\}-68\{5832\}+12\{113021\}-100\{6826318\}\\ &\quad -12\{33366019650\}+12\{43599522992503626068\}\\ \{1\} &= 581\{1023\}+183\{1710\}+664\{5832\}-354\{113021\}-732\{2513489\}\\ &\quad +83\{6826318\}+354\{33366019650\}+366\{79396429263903448 18\}\\ &\quad -354\{43599522992503626068\}\end{aligned}$$

Pair IV. 合成測度值: 2.19252 (Koepp, 1994年)

$$\begin{aligned}\{1\} &= 183\{239\}-12\{682\}+88\{2478\}+24\{12943\}-44\{740943\}\\ &\quad +88\{620658852\}\\ \{1\} &= 159\{239\}+24\{268\}+76\{2478\}-12\{247057\}-32\{740943\}\\ &\quad +76\{620658852\}\end{aligned}$$

Pair V. 合成測度值: 2.21724 (黃見利, 1998年)

$$\begin{aligned}\{1\} &= 44\{57\}-5\{239\}+12\{348\}-12\{812852\}+12\{1453603235443\}\\ \{1\} &= 215\{239\}-32\{348\}-44\{1987\}-56\{812852\}-88\{6826318\}\\ &\quad +44\{33561432\}+56\{1453603235443\}\end{aligned}$$

Pair VI. 合成測度值: 2.27073 (Wetherfield 和黃見利, 1997年)

$$\begin{aligned}\{1\} &= 183\{239\}-12\{682\}+44\{1240\}+24\{12943\}-44\{2485057\}\\ &\quad -88\{6826318\}\\ \{1\} &= 139\{239\}+120\{682\}+44\{5357\}+88\{11591\}+156\{12943\}\\ &\quad +88\{589067107\}\end{aligned}$$

10. 分散式計算 (DISTRIBUTED COMPUTATION)

最後, 我們認爲, 未來利用分散式計算的原理 (例如多台電腦同時使用) 以計算圓周率數值是十分可能的。因此 Wetherfield 和本文作者這兩三年來一直致力於搜尋由巨大的反餘切三角函數值所組成的圓周率公式。我們非常歡迎有興趣的讀者參觀我們的網站 [14]。裡面有些公式非常壯觀且具有分散式計算的價值。

11. 感謝

作者在此希望對兩位恩師, 英國 Michael Wetherfield 先生和臺灣大學數學系陳其誠教授表達內心由衷的感謝。在寫作的期間, 由於他們經常的鼓勵和許多有幫助的討論和有價值的建議, 本文才可能完稿。

參考文獻

1. D. H. Bailey, http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/dhb-kanada.pdf
2. S. Chowla, The greatest prime factor of x^2+1, J. London Math. Soc., 10 (1935), 117-120.
3. C. F. Gauss, Werke, Bd. 2 (1876), 478-481.
4. Hwang Chien-lih, More Machin-type identities, Math. Gaz. 81 (1997), 120-121.
5. Hwang Chien-lih, Some observations on the method of arctangents for the calculation of π, Math. Gaz. 88 (2004), 270-278.
6. M. Keates, On the greatest prime factor of a polynomial, Proc. Edinburgh Math. Soc., Ser. II, 16 (1968), 301-303.
7. D. H. Lehmer, On arccotangent relations for π, Amer. Math. Monthly 45 (1938), 657-664.
8. G. Pólya, Zur Arithmetischen Untersuchung der Polynome, Math. Zeitschrift, 1 (1918), 143-148.
9. D. Shanks and J. W. Wrench, Jr., Calculation of π to 100,000 decimals, Math. Comp. 16 (1962), pp. 76-99.
10. C. Störmer, Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$, k de l'équation $c_1\mathrm{arctg}x_1 + c_2\mathrm{arctg}x_2 + \cdots + c_n\mathrm{arctg}x_n = k\frac{\pi}{4}$, Archiv. Math. Naturv. 19, No. 3, 1 to 96 (1896).
11. C. Störmer, L'Intermédiaire des Mathematiciens, v. II, p. 244, Bulletin de la Societé Mathematique de France, 1899, p. 160, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, 1896.
12. J. Todd, A problem on arc tangent relations, Amer. Math. Monthly 56 (1949), 517-528.
13. Wetherfield, The enhancement of Machin's formula by Todd's process, Math. Gaz. 80 (1996) 342-343.
14. M. Wetherfield and Hwang Chien-lih, http://machination.mysite.freeserve.com.
15. Ushiro Yasunori, http://www.dept.edu.waseda.ac.jp/math/ushiro/.

—本文作者現就讀於國立臺灣大學數學研究所碩士班二年級—