$\sqrt{2}$, π 和 e 芻議

徐瀝泉 · 周建勳

摘要. 本文在參考文獻 [1] 的基礎上, 從數學的審美角度出發, 由圓周率 π 和自然對數的冪級數展式把 $\sqrt{2}$ 、π 和 e 納入到一個通式之中; 然後綜述了這三個基本常數的重要性。

1. 數律條條美絕倫

最近「數學傳播」季刊 (第二十六卷第三期, 下簡稱文 [1]) 發表了本文作者之一的一篇論文 “高斯函數和它的一個現實原型”, 給出了 $\sqrt{2}$ 的一個 “優美比”:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots} \text{ 或 } \sqrt{2}=\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots}. \tag{1}$$

爲下面行文方便起見, 需要用到的文 [1] 中的有關公式也一並列出於下:

$$y=\frac{360}{11}\left\{\left[\frac{11x-180}{360}\right]+\frac{3}{2}\right\}-x, \text{ 或 } y=\frac{360}{11}\left\{1-\left(\frac{11x-180}{360}\right)\right\} \tag{2}$$

$$y=\frac{180}{11}+\frac{\frac{360}{11}}{\pi}\sum\frac{(-1)^k\sin\frac{11}{180}k\pi x}{k}, \quad x\in\left((2k-1)\cdot\frac{180}{11},\ (2k+1)\cdot\frac{180}{11}\right). \tag{3}$$

$$S_1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \tag{4}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots\right)=-\frac{\pi}{8} \tag{5}$$

$$S_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots\right)=-\frac{\pi}{6} \tag{6}$$

(詳細可參見參考文獻 [1])。

這裡我們想起了古希臘亞歷山大時期新柏拉圖主義派的頭面人物、歷史上最著名的評論家之一, Proclus (普洛克努斯, 410-485) 的一句名言:

那裡有數, 那裡就有美。

—— Proclus

然而在那無窮多個數中比下述三個基本常數

$$\sqrt{2}\text{、}\pi \text{ 和 } e$$

更有名的數恐怕是寥寥無幾了。

我們由 (4) 式, 即圓周率 π 的 Gregory-Leibniz 展開式, 以及對數函數的冪級數展式馬上就可以把 $\sqrt{2}$、π 和 e 這三個無理數統一在如下的解析運算式中 (參見第3部分*式):

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}=e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\cdots}, \tag{7}$$

或

$$\sqrt{2}=\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}{\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots}. \tag{8}$$

若記
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right),$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+2},$$

和
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{1}{2n+2},$$

則由 (7) 和 (8) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)\\&=e^{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)\end{aligned}$$

或

$$\sqrt{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)=e^{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{2n+2}}.$$

順便指出, 由 (6) 式, 我們便得到數學史上的另一個著名的公式:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{9}$$

(見參考文獻 [2] 第30頁) 或把它表示為:

$$\sqrt{3}=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots}\text{ 或 }\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots}{\frac{\pi}{3}}. \tag{10}$$

若在公式 (2) 和 (3) 中令 $x=\frac{30}{11}$, 得:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}-\frac{1}{22}+\frac{1}{26}+\frac{1}{27}-\frac{1}{33}+\frac{1}{34}-\frac{1}{38}+\frac{1}{39}-\frac{1}{45}-\frac{1}{46}+\cdots}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-\frac{1}{35}+\frac{1}{37}-\frac{1}{41}+\frac{1}{43}-\frac{1}{47}+\cdots}$$

(注: 分子符號規律: “正正負正負正負負” 迴圈, 分子的分母每兩個連續的自然數之間 “隔六差四”; 分母符號規律: “一正一負” 迴圈, 分母的分母 “隔四差二”, 迴圈遞進。)

這裡我們必須提及歷史上關於 $\sqrt{2}$ 、π 和 e 的另兩個著名公式, 其中之一就是把 0, 1, π 和 e 且與虛數單位 i 融爲一體的歐拉公式

$$e^{i\pi}+1=0,$$

它被 Euler 譽爲是數學最美的公式! 另一個就是用 $\sqrt{2}$ 、π 和 e 求階乘 $n!$ 的解析運算式

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots\right].$$

B_{2k} 是 Bernouli 常數, 當 n 很大時, 可略去等式右邊指數部分的因數, 即

$$n!\propto\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

它們是 James Stirling (斯特林1692-1770) 和 De Moivre (棣美弗, 1667-1754) 於1730年得到的。

2. $\sqrt{2}$ 、π 和 e 重要性綜述及其它們各自的地位與作用

衆所周知, 在小學裡人們就已經知道圓周率 π ($\approx$ 3.14), 在中學裡已經瞭解 $\sqrt{2}$ ($\approx$ 1.414) 是無理數的證明, 而每一位高中生也都習慣於用 e ($\approx$ 2.7182) 來表示自然對數的底。大學生們對於它們更是運用自如了。可見, 這三個基本的數學常數對現代公民和現代文明來說, 依然是多麼的重要!

事實上, 在數學的產生、發現、發明和發展的每一個重要的歷史關頭, 無不伴隨著這三個無理數的那些扣人心弦的故事, 這可以追溯到西元前數千年古埃及、古希臘和我國古代的古代數學時期, 也可以追溯到中世紀的文藝復興運動到著名的 Copernicus (哥白尼, 1473-1543) 革命時期; 從17世紀的科學革命、18世紀的啓蒙運動到19世紀的工業革命和今日的資訊技術與分子生物學革命時期。從西元前5世紀 Pythagoras (畢達哥拉斯, 約西元前560年–前480年) 學派的 Hippasus (希伯索斯, 約西元前5世紀)、Archimedes (阿基米德, 西元前287年–前212), 到我國古代著名科學家張衡 (78-139)、劉徽 (約225-295)、祖沖之 (429-500); 從 Galileo (伽俐略, 1564-1642)、Newton (牛頓, 1642-1727) (注1: 一顆巨星隕落, 一顆巨星又誕生)、Leibniz (萊布尼茨, 1646-1716) 到 Euler (歐拉, 1707-1783)、Gauss (高斯, 1777-1855), 沒有哪一位大科學家、數學家沒有關注並投身於對此三數的計算和研究。阿基米德、牛頓和高斯被並列爲從古至今三個最大的數學家。因此, 可以認爲阿基米德是古代最偉大的數學家。π 値的第一次嚴格的數學計算就歸功於他。牛頓曾親自把 π 計算到小數點之後第15位。善於計算的數學大

師高斯, 儘管在歷史上沒有留下他直接計算此三數的記錄, 但是20世紀所產生的一些關於 π 等無理數的新演算法新模式卻都源於19世紀的高斯思想 (見參考文獻 [3])。

前面已經說過, $\sqrt{2}$ 是無理數的證明, 現在初中生就已經掌握了。最近臺灣大學的蔡聰明教授收集了28種證法, 涉及到數學各方面的概念 (見參考文獻 [4])。但衆所周知 $\sqrt{2}$ 是無理數, 亦即不可公度比的發現, 卻伴隨著驚心動魄的一幕。

希臘人有時用近似值表達 $\sqrt{2}$ 時, 先用 $\frac{49}{25}$ 代替2, 然後得出 $\frac{7}{5}$。可以這樣理解, 這是用有理數逼近實數的一個良好的開端。華羅庚教授在他的科普讀物「從孫子兵法談起」這本小册子裡, 曾深入淺出地用較大篇幅談到連分數和漸近分數的理論。第一個用連分數來逼近平方根, 求出 $\sqrt{2}$ 的近似值的人是 R. Bombelli (幫貝利, 16世紀), 他在他的「代數」(Algebra, 1572) 裡寫出:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots,$$

取第二個漸近分數便是 $1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}$。從這裡我們可以看到它們的優美性不亞於黃金分割的連分數表示

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots=0.618\cdots.$$

牛頓研究級數是和他的流數法分不開的。下面我們用牛頓二項展開式

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots,\quad |x|<1.$$

(這級數的收斂半徑 $r=1$, 且當 $x=1$ 時收斂) 來看 $\sqrt{2}$ 的冪級數表示:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}&=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}+\cdots\\&=1+\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^4}+\cdots\end{aligned}$$

或 $$\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2\cdot 2^1}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 2^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 2^4}-\cdots.$$

從形式上看, 儘管它們比起上面的連分數來略遜風騷, 然而它們在近似計算中是非常有效的, 也就是這級數的收斂速度較快。當然利用 Taylor 公式和牛頓法, 取 $f(x)=x^2-2$, 則遞推數列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$$

將更快地收斂於 $\sqrt{2}$, 這正是現代利用電腦快速計算平方根的非常有效的方法。

關於圓周率 π 的歷史典故, 有興趣的讀者可以參考「神奇的 π」(商周出版社)。

到17世紀, 隨著微積分的發明, 出現了一些從本質上計算 π 的公式。而在牛頓和萊布尼茨以前, 把分析方法引入微積分工作做得最多的人是 John Wallis (1616~1703)。他在分析地計算圓面積的努力中得到 π 的一個新的非常優美的運算式 (同 [3]):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

他還引用了英國皇家學會的第一任會長 William Brouncker 勳爵 (1620~1684) 對此式所化成的連分數運算式

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+}\cdots.$$

牛頓也親自用計算圓面積的方法計算過 π, 不過牛頓使用的是一個半徑為 $\frac{1}{2}$ 的半圓 (如圖1) $y=\sqrt{x-x^2}=x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$

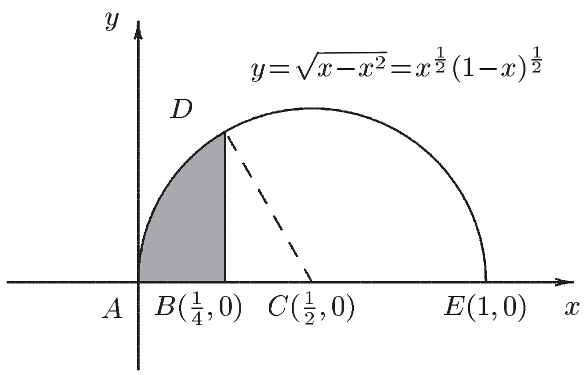

圖 1

他把右邊的二項式展開, 計算 $f(\frac{1}{4})=0.07677310678$。這就是圖中陰影部分的面積。而由幾何方法可得 $S_{\triangle ABD}=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{2}}{32}$, 故可計算出 $\pi\approx 3.141592668\cdots$.

關於 π 的最著名、最簡潔從而也是最優美的解析式是由 James Gregory (格雷戈裡, 1638~1675) 和萊布尼茨於1671~1674年間相互獨立地發現的, 故稱為格雷戈裡–萊布尼茨公式:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots.$$

在反三角 $\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^t(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)dt$ 中令 $x=1$ 即得此式。對此級數, 取50萬項截斷時, 給出了 π 的40位運算式:

$$4\sum_{i}^{50萬}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=3.14159\underset{2}{\underline{0}}6535897932\underset{18}{\underline{40}}4626433832\underset{7}{\underline{6}}9502884197$$

但是右邊的數並不是 π 的40位正確值, 劃線的那4個數位是錯的, 下面給出了它們的修正值。十分有趣的是, 這些修正值與歐拉數和 J. Bernoulli (伯努利, 1655-1705) 數等有關 (見參考文獻 [6])。

牛頓、萊布尼茨、歐拉和其他許多人, 都爲了計算 π 和 e 等一些特殊的量而對無窮級數感興趣。這裡我們不能不提及大數學家歐拉。我們現在都把圓周率記爲 π, 記號 $\pi = 3.14159\cdots$ 是英國數學家 William Jones (瓊斯, 1675～1749) 首創的, 歐拉於1737年沿用了它, 從此通行於世。我們所熟知的歐拉的一個典型例子就是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\cdot\frac{(2k)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k},$$

這是他所得到的最優美的成果之一 (證明詳見 [2], 從第14頁到31頁, 其中 B_{2n} 是伯努利數, 它在 zeta 函數和概率分佈中都有重要應用)。由它, 設 $k = 1, 2, 3$ 等值時便得到關於

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

等一系列結果, 限於篇幅這裡不再贅述。

由於對級數 $\sum n^{-2k}$ 的研究, 導致了另一個級數 $\sum n^{-s}$。歐拉又把這個無窮和表示爲無窮乘積的形式。爾後由 B. Riemann (黎曼, 1826-1866) 把 s 推廣到了複數, 由 zeta 函數

$$\zeta(s) = \sum\frac{1}{n^s} = \prod_p(1-p^{-s})^{-1}$$

的對稱性就產生了 Riemann 猜想:

zeta 函數的所有零根, 在複數平面上除了負偶數外, 都正好落在實部等於 $\frac{1}{2}$ 的垂直線上。

"π 在數學裡之所以非常重要, 就是它會在許多令人意外的關鍵場合很漂亮的出現" (參見 [7])。

除此以外 π 還有著許多其他的用於計算的解析運算式和疊代公式, 這裡略舉兩例:

例1. 印度數學家 Ramanujan (拉瑪努揚, 1887～1920, 世界上最貧窮的數學家, 最後終於在貧病交加中死去) 在1910年發現的下述公式, 它簡直就像天書一樣令人不可思議。1985年利用這一公式將 π 計算到1700萬位:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4\cdot 396^{4k}}.$$

與此類同的還有公式

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)(k!)^3\cdot 640320^{3k+312}}.$$

用此公式, 哥倫比亞大學的教授們在1994年把 π 值計算到了40億位 (同 [3])。

例2. 1976年, Engene Salamin 和 Richard Brent 獨立地發現了 π 的新演算法, 該法是基於算術–幾何平均數和運用我們在上文提到的高斯的思想而發明的。由遞推數列

$$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2},\quad b_k=\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}},\quad c_k=a_k^2-b_k^2,\quad s_k=s_{k-1}-2^kc_k,\quad p_k=\frac{2a_k^2}{s_k},$$

其中 $a_0=1$, $b_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_0=\frac{1}{2}$, $k=1,2,3,\ldots$.
多次疊代, 在電腦上計算 π 的速度比以往任何經典公式都快。東京大學的教授們多次使用 Salamin-Brent 方法, 並由此改進與設計了3次4次疊代公式, 在日立超級電腦上將 π 計算到十進小數的64億位, 這是該領域1995年的世界記錄 (同 [3])。

π 在本質上一開始就和古希臘的化圓爲方等尺規作圖問題相聯結, 但直到18世紀中葉之前, 還經常有人在考慮 π 的十進位展開是否會重覆。1761年, 由 Lambert (蘭伯特, 1728-1777) 證明了 π 是無理數後, 這個問題才得以終止。一波未平, 一波又起, 在此之前早就有人在考慮 π 是否是代數方程的根? Legendre (勒讓德, 1752-1833) 就是其中之一。他在自已獨立地證明 π 是無理數之前就曾猜測 π 是否是有理係數方程的根。這一猜測終於導致了無理數的分類。1882年, Lindemann (林德曼, 1852-1939) 證明了 π 是超越數, 這也就從根本上否定了化圓爲方的尺規作圖問題。之所謂稱超越數, 用歐拉的話來說, 就是它們超越了代數方法的能力。

e 和 π 一樣, 它不僅是無理數, 而且也是超越數。1737年歐拉首先證明了 e 和 e^2 都是無理數。蘭伯特就是在此基礎上得到 π 是無理數的證明的。要知道 π 是無理數的初等微積分證明的讀者可參閱日本著名數學家小平幫彥的文章, 參考文獻 [8]。

關於 e 是超越數的證明, 1873年由 Hermite (埃爾米特, 1822-1901) 解決。當他證得了 e 是超越數的結果之後, 他興奮地寫信給他的朋友說, “我不敢於試著證明 π 的超越性, 如果其他人承擔了這項工作, 對於他的成功, 沒有比我再高興的人了。” 9年之後, 林德曼就用實質上與埃爾米特並無多大差別的方法證明了 π 的超越性。

對數函數的發明, 是在17世紀被當作求等軸雙曲線下的面積而得到的。第一個注意到面積能解釋成對數的人是比利時耶穌會會員 Alfons. A. Sarasa (薩拉薩, 1618-1667), 他的老師 St. Vincent Gregory (1584-1667) 在「幾何著作」(1647年) 中給出了直角雙曲線和對數函數之間的重要聯繫, 從而給薩拉薩提供了根據 (圖2)。運用現在的符號就是圖2及其下面的積分表達式。1665年左右牛頓也注意到雙曲線下的面積與對數之間的關係, 並將這個關係寫在他的「流數法」中, 他用二項式定理展開 $\frac{1}{1+x}$, 並逐項積分, 得到

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots.$$

現在我們知道, 這個級數的收斂半徑是1, 即

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad -1<x\le 1.$$

令 $x=1$, 就得到

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots.$$

故 $\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots$ 或 $\sqrt{2}=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots}$ ....(*)

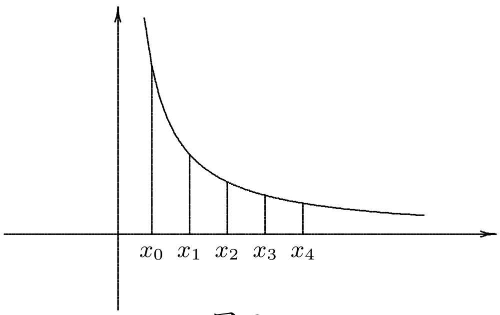

圖 2

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}=k\ln y,\quad (y=\frac{1}{x}).$$

對數是繼乘方、開方之後第7種數學運算,

它與解析幾何、微積分被人們視爲17世紀數學最偉大的成就。其實對數函數是性質相對簡單的指數函數的反函數。但在17世紀初期, 人們並不把對數定義爲冪指數, 因爲那時還沒有運用分數指數和無理指數。直到1742年 William Jones (瓊斯, 1675-1749) 才第一次釐清了它們之間的關係。歐拉把這兩個函數定義爲

$$e^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n,\quad \ln x=\lim_{x\to\infty}(x^{\frac{1}{n}}-1).$$

關於對 $\sqrt{2}$ 、π 和 e 的本質的探究, 大約可分三個層次。第一個層次是關於它們是否是兩個整數之比, 即區分它們是有理數還是無理數: 第二個層次是當得知它們是無理數之後, 則關心它們是否是某個整係數代數方程的根 (這對 $\sqrt{2}$ 來說是顯而易見的), 即是代數數還是超越數的問題; 第三個層次是當證明 π 和 e 都是超越數之後, 人們又懷疑起它們 (這時 $\sqrt{2}$ 又被列入其中) 是否具有正則性, 即它們之中任何一個數位出現的極限頻率是否是 10^{-1} (十分之一), 和任意長爲 n 的一串十進位數數字出現的極限頻率是否是 10^{-n} ($n\in\mathbb{N}$) 這樣的事情。儘管到目前爲止還沒有發現它們有任何不正則性, 但是也尚未發現它們的正則性。由此, 我們可以大膽地進

行這樣的猜測, 那就是關於這幾個著名常數的更令人激動的新的事實還被深埋在尚未發現的數學知識之中。

参考文獻

1. 徐瀝泉, 高斯函數和它的一個現實原型, 數學傳播, 26卷3期, p.88-93, 2002。
2. Winfried Scharlau, Hans Opolka from Fermat to Minkowski, Lectures on the Theory of Numbers and its Historical Development by Springer-Verlag, p.30, by Springer-Verlag, New York Inc ©1985.
3. D. H. Bailey 等著, 王天明等譯, 圓周率的探索, 數學譯林, 1997, 3, p.205-215。
4. 蔡聰明, $\sqrt{2}$ 爲無理數的證明, 數學傳播, 23卷1期, p.12-23, 1999。
5. M. Kline 著, 張理京、朱學賢、萬偉勳、鄧東臯等譯, 古今數學思想, 第1册至第4册, 2002。
6. J. M. Borwein 等著, 姚景齊譯, π、歐拉數, 和漸近展開, 數學譯林, 1996, 2, p.161-167。
7. 于靖, Zeta 函數與超越不變數, 數學傳播, 24卷1期, p.9-16, 2000。
8. 小平邦彥, 數學中沒有快捷方法, 陳治中譯, 數學譯林, 1998, 3, p.234-245。
9. 宋秉信, 自然對數漫談, 數學傳播, 23卷1期, p.70-75, 1993。

—本文作者任職於中國無錫市教育研究中心—