與周界中點三角形相關聯的 N–P 不等式

丁遵標

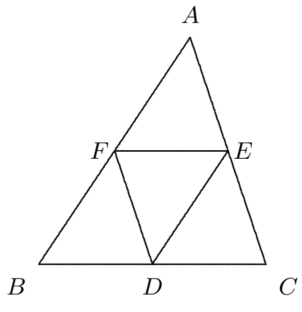
摘要: 本文獲得了與周界中點三角形相關聯的紐伯格 (Neuberg) – 匹多 (Pedoe) 不等式, 簡稱 N–P 不等式。

關鍵詞: 周界中點三角形、邊長、面積。

筆者通過對周界中點三角形的深入研究, 發現了周界中點三角形與其原三角形之間有著一定的關係, 便得到了與周界中點三角形相關聯的紐伯格 (Neuberg) – 匹多 (Pedoe) 不等式, 簡稱 N–P 不等式, 從而將周界中點三角形的研究更加深入。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $EF=a_1$, $FD=b_1$, $DE=c_1$, 則記作 $H_2=a^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2)+b^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)$。

定理: 若 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的周界中點三角形, $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的面積分別爲 S_1、S_2, 則有: $H_2\geq(15-4\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})S_1^2+16S_2^2$



爲證明此不等式, 先看下面的兩個引理:

引理1: 若 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的周界中點三角形, 則有:

$$a_1^2=a^2-\frac{4S_1^2}{bc},\qquad b_1^2=b^2-\frac{4S_1^2}{ca},\qquad c_1^2=c^2-\frac{4S_1^2}{ab}.$$

證明: 設 $\triangle ABC$ 的半周長爲 P, 由周界中點三角形的定義知:

$$AE+AB=AF+AC=P$$
$$\therefore\ AE=P-c,\quad AF=P-b.$$

在 $\triangle AEF$ 中:

$$EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos A$$

即
$$\begin{aligned}a_1^2&=(P-b)^2+(P-c)^2-2(P-b)(P-c)\cos A\\&=[(P-b)^2+(P-c)]^2-2(P-b)(P-c)(1+\cos A)\\&=(2P-b-c)^2-2(P-b)(P-c)\Big(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big)\\&=a^2-\frac{(P-b)(P-c)(b+c+a)(b+c-a)}{bc}\\&=a^2-\frac{4P(P-a)(P-b)(P-c)}{bc}\end{aligned}$$

由海倫公式 $S_1=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ 得

$$a_1^2=a^2-\frac{4S_1^2}{bc}$$

同理: $b_1^2=b^2-\frac{4S_1^2}{ca}$, $c_1^2=c^2-\frac{4S_1^2}{ab}$。

引理2: 若 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的周界中點三角形, 則有

$$\frac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{ab}+\frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{bc}+\frac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{ca}\geq\frac{15}{4}-\frac{a^3+b^3-c^3}{abc}.$$

證明: 由引理1知

$$a_1^2+b_1^2-c_1^2=(a^2+b^2-c^2)+4S_1^2\Big(\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}\Big)$$
$$b_1^2+c_1^2-a_1^2=(b^2+c^2-a^2)+4S_1^2\Big(\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}\Big)$$
$$c_1^2+a_1^2-b_1^2=(c^2+a^2-b^2)+4S_1^2\Big(\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\Big)$$

$$\begin{aligned}&\therefore\frac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{ab}+\frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{bc}+\frac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{ca}\\&=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-(a^3+b^3+c^3)+4S_1^2(\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c})}{abc}\\&=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{abc}-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\\&\quad+\frac{4S_1^2(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)}{a^2b^2c^2}\end{aligned}$$

由熟知的恆等式知:

$$a^2+b^2+c^2=2(P^2-4Rr-r^2)$$
$$ab+bc+ca=P^2+4Rr+r^2$$
$$abc=4RrP,\quad S_1=rP$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)=2P(P^2+2Rr+r^2)$$
$$\therefore \frac{4S_1^2(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)}{a^2b^2c^2}$$
$$=\frac{4r^2P^2[2(P^2-4Rr-r^2)-2(P^2+4Rr+r^2)]}{(4RrP)^2}$$
$$=\frac{1}{4R^2}(-16Rr-4r^2)$$
$$=-\frac{4r}{R}-\frac{r^2}{R^2}$$

又 $\because a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$

$$=(a+b)(b+c)(c+a)-2abc$$
$$\therefore \frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{abc}$$
$$=\frac{2P(P^2+2Rr+r^2)}{4RrP}-2$$
$$=\frac{P^2+r^2}{2Rr}-1$$

由熟知的不等式

$$P^2\geq 16Rr-5r^2,\quad R\geq 2r$$

進一步可得

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{abc}$$
$$\geq \frac{(16Rr-5r^2)+r^2}{2Rr}-1$$
$$=7-\frac{2r}{R}$$
$$\therefore \quad \frac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{ab}+\frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{bc}+\frac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{ca}$$
$$\geq \Big(7-\frac{2r}{R}\Big)-\frac{4r}{R}-\frac{r^2}{R^2}-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$
$$=7-\frac{6r}{R}-\Big(\frac{r}{R}\Big)^2-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$$
\begin{aligned}
&= 7 - 3 - \frac{1}{4} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \\
&= \frac{15}{4} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}
\end{aligned}
$$

故 $\dfrac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{ab} + \dfrac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{bc} + \dfrac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{ca} \geq \dfrac{15}{4} - \dfrac{a^3+b^3-c^3}{abc}$

下面, 我們來進一步證明此不等式。

證明: 由引理1, 我們進一步可以得到:

$$
\begin{aligned}
H_2 &= a^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2) + b^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2) + c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2) \\
&= (a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2) - 2(a_1^2a^2+b_1^2b^2+c_1^2c^2) \\
&= \left[(a_1^2+b_1^2+c_1^2) + 4S_1^2\Big(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\Big)\right](a_1^2+b_1^2+c_1^2) \\
&\quad -2\left[(a_1^4+b_1^4+c_1^4) + 4S_1^2\Big(\frac{a_1^2}{bc}+\frac{b_1^2}{ca}+\frac{c_1^2}{ab}\Big)\right] \\
&= [(a_1^2+b_1^2+c_1^2)^2 - 2(a_1^4+b_1^4+c_1^4)] \\
&\quad +4S_1^2\left(\frac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{ab}+\frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{bc}+\frac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{ca}\right)
\end{aligned}
$$

又 $\because (a_1^2+b_1^2+c_1^2)^2 - 2(a_1^4+b_1^4+c_1^4) = 16S_2^2$

再由引理2知:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{ab} + \frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{bc} + \frac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{ca} \geq \frac{15}{4} - \frac{a^3+b^3-c^3}{abc} \\
&\therefore H_2 \geq 4S_1^2\Big(\frac{15}{4} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\Big) + 16S_2^2 \\
&\qquad = \Big(15 - 4\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\Big)S_1^2 + 16S_2^2
\end{aligned}
$$

故: $H_2 \geq \Big(15 - 4\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}\Big)S_1^2 + 16S_2^2$

參考文獻

1. 丁遵標, 周界中點三角形的兩個性質, 安徽教育學院學報, 2002(3): 82, 102.
2. 丁遵標, 周界中點三角形的三個有趣的性質, 數學傳播, 27卷4期, 民92, 89-92.

—本文作者任教於中國安徽省舒城縣杭埠中學—