六階棋盤上的騎士循環漫遊共有1245種

林克瀛

數學大師歐拉最先研究 8×8 西洋棋盤上的騎士循環漫遊, 於1759年發表他的結果。循環漫遊的定義是把騎士棋子放在棋盤上任何一格, 漫遊64步後, 返回起點, 途中經過每一方格正好一次。我在十多年前曾經研究過在六階棋盤上的騎士循環漫遊, 發現有1245種, 但從未發表, 因當年用手算, 擔心可能遺漏一些。最近用電腦檢查, 證實沒有算錯, 因此把結果整理發表。

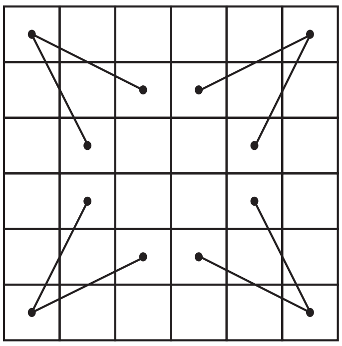
騎士循環漫遊有一特點, 即途中任何一格, 都可選爲起點, 若把沿途經過的每一個方格的中點和下一個方格的中點畫一直線相連, 就得到一條閉合曲線。凡是沿同一條曲線上的漫遊, 不論起點在那一格, 也不論漫遊的方向 (前進或後退), 都視爲等價。一條代表循環漫遊的閉合曲線, 一般情形下將棋盤任意旋轉或翻面後一共可產生八條不同的曲線, 彼此視爲等價。因此在計算不等價的循環漫遊的數目時, 要先研究曲線的對稱性。

循環漫遊只有在階數是偶數 (比四大) 的方形棋盤上才出現, 理由如下: 先把棋盤上某一角落上的方格塗上黑色, 再把相鄰兩方格塗上白色, 依此類推把全部格子塗上黑白兩色, 使相鄰二格顏色不同。騎士漫遊時, 每一步都是由黑格走到白格, 或白格到黑格。階數爲奇數的棋盤, 格子總數也是奇數, 騎士由角上的黑格出發, 走遍全部格子後, 最後一格又是黑格, 若要回到起點 (黑格) 是不可能的事。

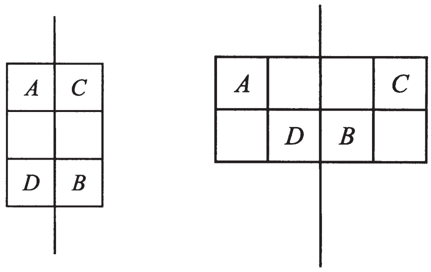
六階棋盤上代表循環漫遊的閉合曲線由36根長度相同的直線相連而成, 其中8根的位置已完全確定, 如圖一所示。因爲騎士由角落上的方格出發, 只有兩種走法。圖一具有旋轉及反射兩種對稱性。若將圖一右旋或左旋90, 180或270度後圖形不變。若將圖一的棋盤以穿過中心的垂直線或對角線爲軸轉180度 (相當於左右互換) 後圖形不變。我多年前分析六階棋盤的循環漫遊時, 發現沒有一條曲線具有反射對稱, 但找不出簡單的證明。最近重新研究後得到一個普遍的定理:

定理: 在階數爲任意整數的方形棋盤上, 任何騎士循環漫遊都不具反射對稱性。

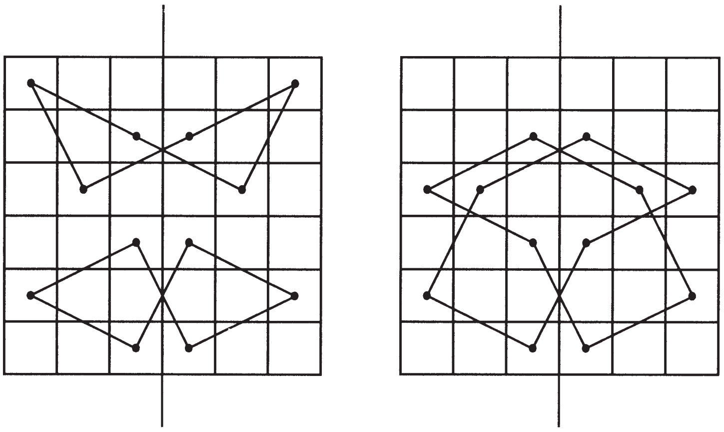
證明: 一條穿過中心的垂直線 (稱爲中線), 把階數爲 $2k$ (k 爲整數) 的方形棋盤平分爲左右兩半, 各有 $2k^2$ 個方格子。騎士由左下角出發, 沿一條左右對稱的曲線, 穿過中線到右半, 再折回左半, 來回 n 次後返回起點。先考慮 $n=1$ (來回一次) 的情形。棋子穿過中線會出現如圖二所示的兩種情形, 由左半 A 格跳過中線到右半 B 格, 走幾步後又由左右對稱的位置 C 格穿過中線回到左半的 D 格。由圖二可知, AD 兩格顏色相同。左半部可視爲有 $2k^2$ 個格子的長方形棋盤, 騎士由起點到 A, 再由 A 到 D (這一步不是走馬步), 最後由 D 回到起點, 沿途每個格子正好經過一次。由於 AD 兩格顏色相同, 這種走法是不可能的。若 n 爲奇數, 上述證明仍然適用。再看 $n=2$ 的情形, 如圖三所示會出現兩種情形。一種是騎士從左半穿過中線後, 折回到同一點回到左半, 由於左右對稱, 騎士不可能再從另一點穿過中線。另一種情形是騎士從左方經一點穿過中線到右方, 再折回由不同點穿過中線回到左方。圖三右圖實際上是兩條不相連的曲線。上述證明可推廣到 n 爲偶數的一般情形。最後考慮沿對角線的反射對稱。對角線穿過 $2k$ 個方格的中點, 騎士如圖四所示由左上方到達對角線上一點後進入右下方, 再折回經另一不同點返回左上方, 由於對稱形成一條閉合曲線。因此出現 k 條不相連的曲線。



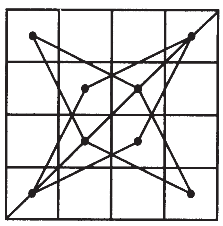
圖一



圖二



圖三



圖四

方形棋盤上的循環漫遊可依旋轉對稱性分爲三大類。第一類對稱程度最大, 把棋盤對中心旋轉90, 180, 或270度後圖形不變。第二類對稱性小, 把棋盤轉180度後圖形不變, 但若只轉90度則與原圖不同。第三類沒有旋轉對稱性。

用紙筆來計算不等價的閉合曲線時, 若爲六階棋盤, 要在圖一上添加 $36-8=28$ 根直線。先看第一類漫遊。由於旋轉對稱, 每一根直線會出現在四個對稱位置, 因此只要考慮 $28/4=7$ 根直線。在圖一的四個角落上的分叉折線兩端各加一根直線後, 可得五種不等價圖形如圖五所示。在圖五的各圖中, 只要在四條曲線上各加五根直線即可找出如圖六所示的五種第一類循環漫遊。計算過程非常簡單, 只需要幾分鐘。第二類漫遊比較複雜, 由於對稱性每根直線會出現在兩個對稱位置, 因此要考慮在圖一中加上 $28/2=14$ 根直線。用紙筆計算約需數小時, 結果如圖七所示共有17種第二類漫遊。代表第二類循環漫遊的閉合曲線, 由四段曲線相接而成。第一段由左下角走 A 步到右下角, 第二段由右下角走 B 步到右上角, $A+B=18$。第三段走 A 步由右上角到左上角。第四段走 B 步由左上角回到左下角。第三及第四段分別和第一及第二段曲線形狀相同。第二類可再依 AB 值分類如下

A	B	漫遊數
3	15	3
5	13	5
7	11	6
9	9	3

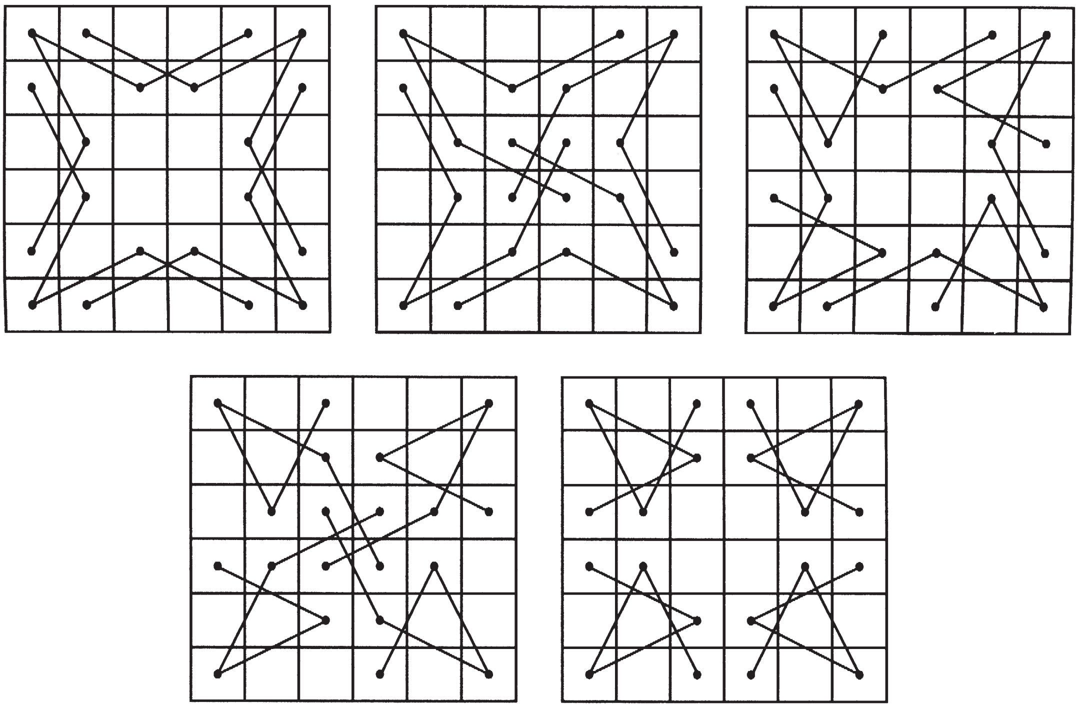
第三類最麻煩, 要在圖一放28根直線。我當年因小兒動手術在醫院照顧一星期, 以計算循環漫遊來打發時間, 發現共有1223種第三類循環漫遊, 舉一例如圖八所示。從結構上分析, 第三類漫遊可以再分爲兩類。第一小類的閉合曲線由四段曲線連接而成, 第一段由左下角走 A 步到右下角, 第二段走 B 步到右上角, 第三段走 C 步到左上角, 第四段走 D 步回起點。$A+B+C+D=36$, 依 $ABCD$ 之值分類如表一所示, 共有754種 (見表一)。第二小類的閉合曲線由四段曲線相連, 第一段由左下角走 A 步到右下角, 第二段由右下角走 B 步到左上角, 第三段由左上角走 C 步到右上角, 第四段由右上角走 D 步回起點。依 $ABCD$ 之值分類如表二所示, 共有469種。兩小類合計爲1223種。全部循環漫遊數爲

$$5+17+1223=1245.$$

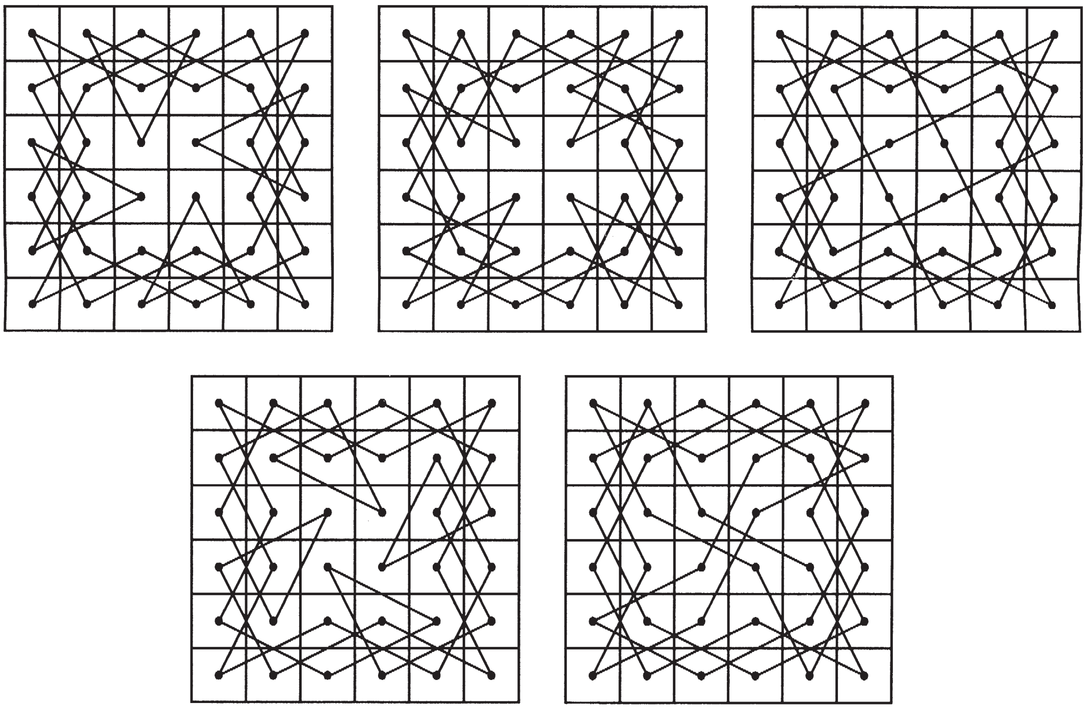
最近我寫了一個簡單的 Fortran 程式, 利用個人電腦來檢查手算結果。這個程式不能分辨漫遊屬那一類, 以致第一, 二, 三大類漫遊各重覆計算2, 4, 8次。結果是

$$5\times 2+17\times 4+1223\times 8=9862$$

和手算結果符合。



圖五



圖六

表一

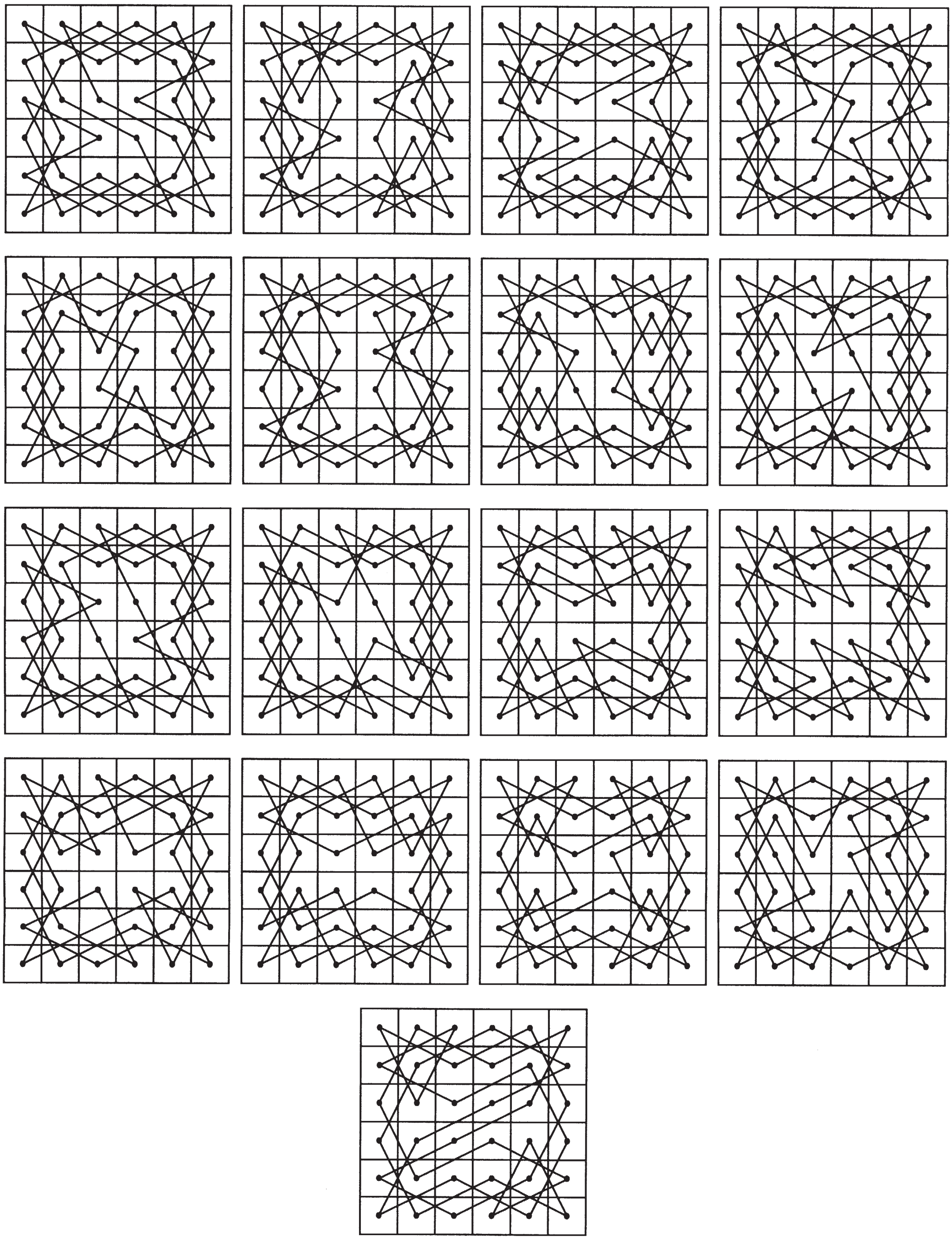
A	B	C	D		A	B	C	D	
3	3	3	27	3	3	3	5	25	7
3	5	3	25	5	3	3	7	23	6
3	7	3	23	2	3	5	5	23	14
3	5	23	5	1	3	3	9	21	3
3	9	3	21	5	3	5	7	21	7
3	5	21	7	3	3	7	5	21	13
5	5	5	21	12	3	3	11	19	6
3	11	3	19	4	3	5	9	19	12
3	5	19	9	9	3	9	5	19	14
3	3	7	19	12	5	7	5	19	10
5	5	7	19	21	3	13	3	17	3
3	3	13	17	7	3	11	5	17	9
3	5	11	17	14	3	7	9	17	5
3	5	17	11	9	3	7	17	9	8
3	9	7	17	5	5	9	5	17	7
5	5	9	17	15	5	7	17	7	11
5	7	7	17	21	3	15	3	15	3
3	3	15	15	8	3	13	5	15	16
3	5	13	15	19	3	7	11	15	5
3	5	15	13	18	3	7	15	11	18
3	9	9	15	3	3	9	15	9	12
5	5	11	15	30	5	11	5	15	7
5	7	9	15	20	5	9	7	15	7
5	7	15	9	23	7	7	7	15	11
3	7	13	13	9	3	13	7	13	2
5	5	13	13	19	5	13	5	13	4
3	9	11	13	10	3	11	9	13	10
3	9	13	11	22	5	7	11	13	15
5	11	7	13	13	5	7	13	11	16
5	9	9	13	13	5	9	13	9	15
7	7	9	13	16	7	9	7	13	4
3	11	11	11	7	5	9	11	11	24
5	11	9	11	14	7	7	11	11	8
7	11	7	11	3	7	9	9	11	25
7	9	11	9	11	9	9	9	9	3
3	11	7	15	8					

754

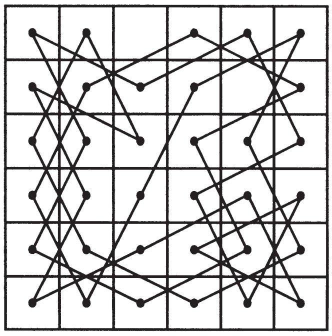
表二

A	B	C	D		A	B	C	D	
3	6	3	24	1	3	8	3	22	2
3	10	3	20	5	3	12	3	18	6
3	14	3	16	2	3	6	5	22	3
3	8	5	20	7	3	10	5	18	20
3	12	5	16	14	3	14	5	14	2
3	6	7	20	2	3	8	7	18	6
3	10	7	16	14	3	12	7	14	12
3	6	9	18	2	3	8	9	16	5
3	10	9	14	11	3	12	9	12	2
3	6	11	16	3	3	8	11	14	7
3	10	11	12	11	3	6	13	14	2
3	8	13	12	15	3	10	13	10	9
3	6	15	12	11	3	8	15	10	13
3	6	17	10	5	3	8	17	8	3
3	6	19	8	1	5	8	5	18	9
5	10	5	16	14	5	12	5	14	6
5	6	7	18	8	5	8	7	16	14
5	10	7	14	15	5	12	7	12	8
5	6	9	16	2	5	8	9	14	9
5	10	9	12	21	5	6	11	14	4
5	8	11	12	16	5	10	11	10	12
5	6	13	12	9	5	8	13	10	22
5	6	15	10	8	5	8	15	8	7
5	6	17	8	5	7	8	7	14	2
7	6	7	16	5	7	6	9	14	1
7	10	7	12	1	7	10	9	10	4
7	8	9	12	11	7	8	11	10	16
7	6	11	12	3	7	8	13	8	7
7	6	13	10	5	7	6	17	6	2
7	6	15	8	7	9	8	9	10	4
9	6	9	12	5	9	8	11	8	3
9	6	11	10	4	9	6	15	6	1
9	6	13	8	3					

469



圖七



圖八

參考文獻

1. 林建宏, 5階棋盤之騎士漫遊僅有112個解, 數學傳播十卷三期, 20頁 (1986)。
2. 林克瀛, 騎士漫遊方陣與魔方陣, 數學傳播, 印刷中。
3. W. W. R. Ball and H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, University of Toronto Prets, 1974.

—本文作者曾任教於清大物理系, 現已退休—