凸多邊形各邊中點連線所圍的面積

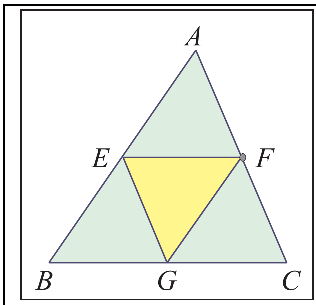
王文光

摘要: 本文借助於 GSP 套裝軟體所提供的環境, 觀察凸 n 邊形各邊中點連線所圍成區域面積與原來凸 n 邊形面積之比值。我們得到如下的結論: 當 $n=3$ 時, 該值爲 $1/4$; 當 $n=4$ 時, 該值爲 $1/2$; 當 $n=5$ 時, 該值介於 $1/2$ 和 $3/4$ 之間; 當 $n\geq 6$ 時, 該值介於 $1/2$ 和 1 之間。

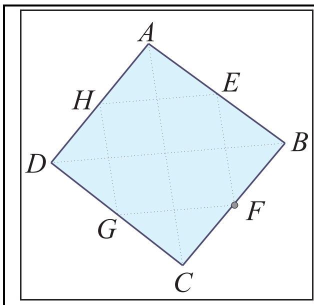
在國中數學課本中, 我們知道三角形、四邊形各邊中點連線所圍成面積與原來面積的比值, 分別爲 $1/4$ 和 $1/2$。在本文裡, 我們擬針對凸五邊形及其他凸 n 邊形, 探討是否也有類似的固定比值? 如果沒有, 是否有其他的關係呢? 爲對任意多邊形更進一步探討此一關係, 我們先利用 GSP 軟體, 進行一般的觀察, 瞭解其中的關係, 並進行驗證。

1. 三角形、四邊形的情形

首先重溫三角形、四邊形的性質, 來進行瞭解, 如圖一、二所示, 作爲進一步觀察五邊形的情形的預備工作。



圖一



圖二

定理一: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 E、F、G 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 的中點, 則

1. $\overline{EF}$ 平行 $\overline{BC}$ 且 $\overline{EF}=\overline{BC}/2$;
2. $\triangle EFG=\frac{1}{4}\triangle ABC$。

證明: .... (skip) .... 證畢。

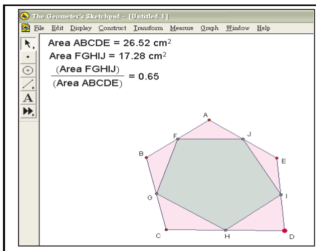
定理二: 在任意四邊形 $ABCD$ 中, E、F、G、H 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 的中點, 則

1. 四邊形 $EFGH$ 爲平行四邊形;
2. $\square EFGH = \frac{1}{2}\square ABCD$。

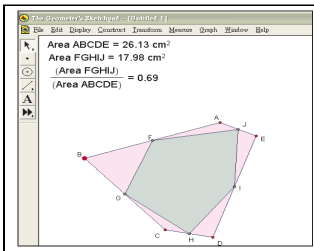
證明: .... (skip) .... 證畢。

2. 五邊形的情形

我們利用 GSP 檢驗五邊形的各邊中點連線所圍成面積與原來五邊形面積的比值。如圖三、四所示, 可以看出其比值分別爲0.65和0.69, 並非定值。

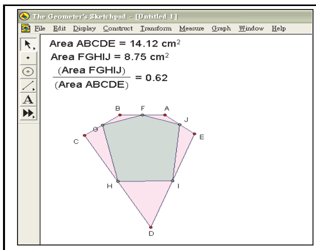


圖三

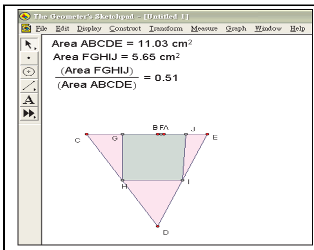


圖四

然而該比值會不會落在某一範圍之內呢? 由圖五、六的觀察, 將 A 和 B 兩點, 往 $\overline{CE}$ 中點移動時, 我們觀察到越靠近, 該比值越靠近 $1/2$; 當 A 與 B 落在 $\overline{CE}$ 的中點時, 我們觀察到其比值恰好爲 $1/2$。



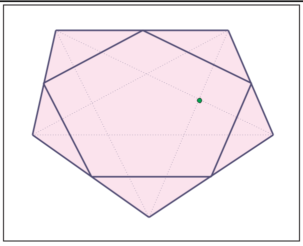
圖五



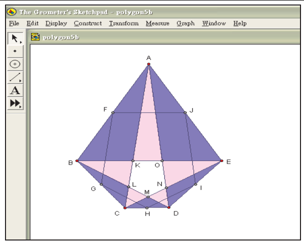
圖六

在凸五邊形 $ABCDE$ 內, 如圖七所示虛線所成的五角星形面積與其內部所圍五邊形 $KLMNO$ 面積皆爲正數。如圖八, 當點 C、D 落在線段 $\overline{BE}$ 上, 且讓 C、D 兩點無限接近時, 五角星形面積與五角星形內部所圍五邊形 $KLMNO$ 面積兩者皆爲0, 於是得到該比值的下限 $1/2$。仿得到下界 $1/2$ 的模式, 利用下面的圖形, 針對該比值的上界進行觀察。如圖九, 將 A 與 B 分

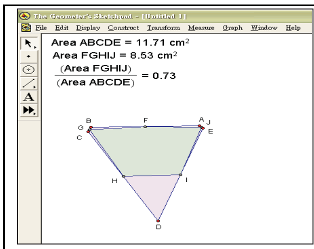
別往 C 與 E 移動時, 我們可得恰好移到點上時其比值上限會等於 $3/4$。又如圖十, 當點 C、D 分別趨近點 B、E 時, 五角星形面積極爲接近五邊形 $ABCDE$ 的面積, 五角星形內部所圍五邊形 $KLMNO$ 面積則接近0, 於是得到比值上限 $3/4$。



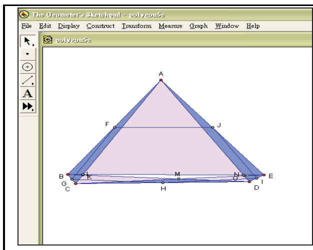
圖七



圖八



圖九



圖十

我們於是預測下述不等式

$$1/2 \leq \frac{\text{凸五邊形面積各邊中點連線所圍成面積}}{\text{原來凸五邊形面積}} < 1,$$

並將利用面積分割的方法, 證明上述觀察所得到的不等式的確成立。

定理三: 五邊形 $ABCDE$ 中, F、G、H、I、J 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{AE}$ 的中點, 則

1. 五邊形 $FGHIJ$ 的面積
$= ABCDE/2 + (\triangle ACD + \triangle BDE - \triangle CDE)/4,$
$=$ (五邊形 $ABCDE$ 的面積)$/2$
$+$(五角星形面積 $+$ 五角星形內部所圍五邊形 $KLMNO$ 面積)$/4;$
2. $1/2 < \dfrac{\text{凸五邊形面積各邊中點連線所圍成面積}}{\text{原來凸五邊形面積}} < 3/4$。

證明: 因爲

五邊形 $FGHIJ$ 的面積

$=$ 五邊形 $ABCDE$ 的面積 $- (\triangle FAJ + \triangle JEI + \triangle IDH + \triangle HCG + \triangle GBF);$

若將

$$
\begin{aligned}
&(\triangle FAJ+\triangle JEI+\triangle IDH+\triangle HCG+\triangle GBF)\\
=&(\triangle BAE+\triangle AED+\triangle EDC+\triangle DCB+\triangle CBA)/4,\\
=&(2\text{倍五邊形 } ABCDE \text{ 的面積} - \text{五角星形面積}\\
&\quad -\text{五角星形內部所圍五邊形 } KLMNO \text{ 面積})/2,
\end{aligned}
$$

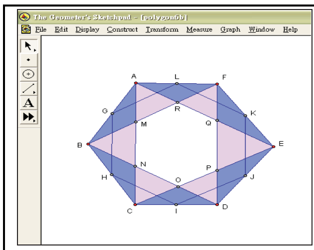
代入上式, 得

$$
\begin{aligned}
&\text{五邊形 } FGHIJ \text{ 的面積}\\
=&\text{五邊形 } ABCDE \text{ 的面積}/2\\
&+(\text{五角星形面積} + \text{五角星形內部所圍五邊形 } KLMNO \text{ 面積})/4\text{。}
\end{aligned}
$$

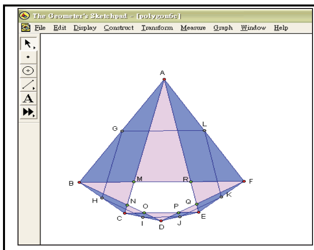
.... (skip) .... 證畢。

3. $\boldsymbol{n} \geq 6$ 邊形的情形

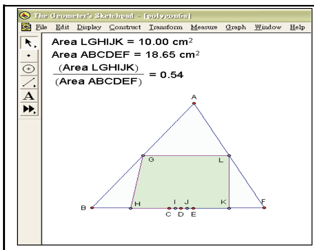
根據凸五邊形的經驗, 我們繼續針對凸六邊形的情形考察。如圖十三、十四所示, 若把 C、D、E 三點向線段 $\overline{BF}$ 的中點趨近時, 六角星形面積與六角星形內部所圍六邊形 $MNOPQR$ 面積都會變成0, 於是得比值下限 $1/2$。又如圖十五所示, 若分別把 A、C、E 分別趨近 B、D、F, 則可得比值上限 1。



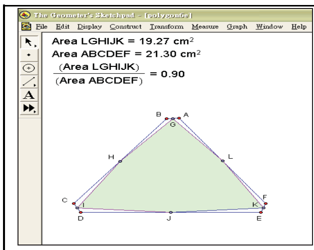
圖十二



圖十三



圖十四



圖十五

定理四: 在凸六邊形 $ABCDEF$ 中, G、H、I、J、K、L 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{AF}$ 的中點, 則

1. 六邊形 $GHIHKL$ 的面積
 $= \frac{1}{2}ABCDEF + \frac{1}{4}(\triangle ACE + \triangle BDF)$
 $=$ 六邊形 $GHIHKL$ 的面積 $=$ (原來六邊形 $ABCDEF$ 面積)/2
 $+$ (六角星形面積 $+$ 六角星形內部所圍六邊形 $MNOPQR$ 面積)/4;
2. $0.5 < \dfrac{\text{六多邊形各邊中點連線所圍成面積}}{\text{原六邊形面積}} < 1$。

證明: .... (skip) .... 證畢。

根據對於凸五邊形圖形的觀察, 我們得到一個很簡要的關係式,

$$\begin{aligned}&\text{五邊形 } FGHIJ \text{ 的面積}\\ =&(\text{五邊形 } ABCDE \text{ 的面積})/2\\ &+(\text{五角星形面積} + \text{五角星形內部所圍五邊形 } KLMNO \text{ 面積})/4,\end{aligned}$$

令人驚訝的是對任意 $n \geq 6$ 邊形, 也有類似的結論; 這些結論是經由數學實驗而得到的結果。

對任意 $n \geq 6$ 邊形, 也有類似於凸五邊形、凸六邊形的結論, 亦即

1. 凸 n 邊形各邊中點連線所圍面積
 $=$ (原來 n 邊形面積)/2 $+$ (n 角星形面積 $+$ n 角星形內部所圍 n 邊形面積)/4;
2. $1/2 < \dfrac{\text{任意 } n \text{ 邊形各邊中點連線所圍成面積}}{\text{任意 } n \text{ 多邊形原來面積}} < 1$。

參考文獻

1. Understanding ratios of areas, e-example 7.3 in
 http://standards.nctm.org/document/eexamples/index.htm
2. 李政豐: 多邊形面積比是否爲常數 — 動態學習的例子, 數學傳播季刊106期 (民92年6月), 66-73頁。

—本文作者任教於台北市北政國中—