函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形交點個數的探索

李政豐 · 顏貽隆 · 蔡敏娟 · 陳明君

摘要: 我們首先證明當 $a \in (0, e^{-e})$, $a^{\frac{1}{e}} < \log_a \frac{1}{e}$。接著我們證明: 若指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ 交點的個數爲 n_a, 則 $n_a = 3$ 當 $a \in (0, e^{-e})$, $n_a = 1$ 當 $a = e^{-e}$, $n_a = 1$ 當 $a \in (e^{-e}, 1)$, $n_a = 2$ 當 $a \in (1, e^{1/e})$, $n_a = 1$ 當 $a = e^{1/e}$, $n_a = 0$ 當 $a > e^{1/e}$。

一. 前言

作者參與花蓮師院數學教育系袁媛老師執行的一個九十一年度國科會計畫「數學寫作」。在命題當中, 發現高中數學教科書第二册, 有一個習題『 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形有沒有交點? 』。因爲指數、對數的圖形, 由其底數 a 與指數 (或眞數) x 兩個變數來決定, 因此我們以審愼的態度來討論它。指數與對數函數的圖形在底數 a 哪些範圍內, 會有交點? 有幾個交點? 是我們觀察的重點。

目前高中數學課本的圖示是: 當 $0 < a < 1$, $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形有一個交點, 如圖 (3) 所示, 沒有人懷疑它的正確性。我們用 Excel 做一個小軟體以呈現兩函數 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 的交點 (如圖 (1)∼(3)), 每個 Excel 圖形中, 第一、二兩行是指數函數的描點坐標, 第三、四行是對數函數的描點坐標。由於兩個函數以直線 $y = x$ 成對稱, 故描點的 x、y 坐標恰好顚倒。由圖上顯示, $a \approx 1.44$ 時有一個交點、$a \approx 1.4$ 時有兩個交點、$a \approx 0.52$ 時有一個交點, 我們發現大約 $a \leq 1.44$ 時, $y = x$、$y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形開始有交點, 我們思考如何求得 $a \approx 1.44$ 這個眞值? 交點坐標爲何?

我們也用 GSP 做了 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 的交點圖, GSP 直角坐標的單位長是可以自由調整的, 要同學觀察交點的個數, 結果有學生很驚訝的發現當 $0 < a < 0.066$ 時, $y = a^x$, $y = \log_a x$ 有三個交點, 如圖 (4) 所示, 當時我們擔心是否 GSP 的計算有瑕疵, 我們再用

Maple 畫圖、解方程式的根, 發現確實有三交點, 於是大家都在思考要如何求得 $a \approx 0.066$ 的眞值? 當 $a \approx 0.066$ 時, 交點坐標爲何? 爲什麼會有三交點? 我們先針對 $a \approx 1.44$、$a \approx 0.066$ 這兩個數的眞值如何求得? 再試著解出三根, 最後完成當 $a \in (0, e^{-e})$ 有三個交點的證明。以下先列出重要的引理定理。

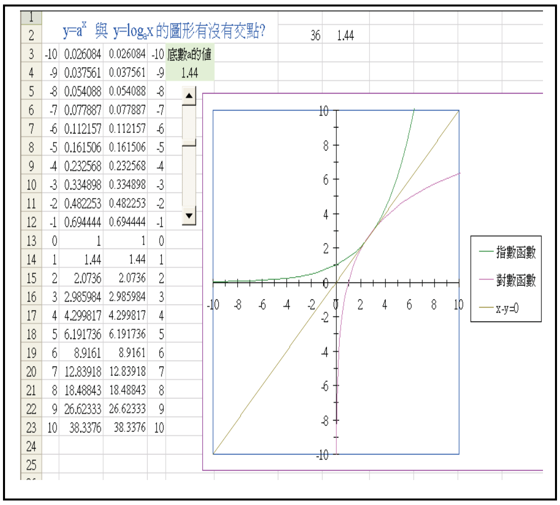

圖1. $a \approx 1.44$ 開始有交點

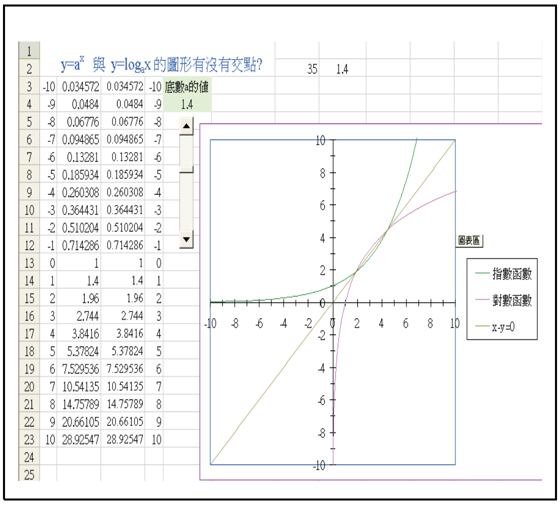

圖2. $a \approx 1.4$ 時有兩個交點

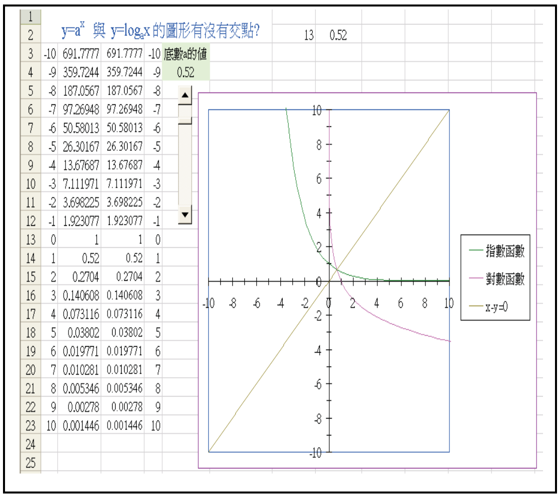

圖3. $a \approx 0.52$ 時有一個交點

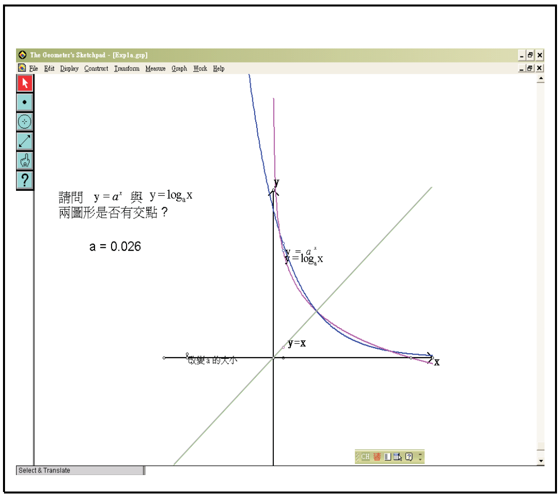

圖4. $a \approx 0.026$ 有三個交點

引理1: 若 $a \in (0, e^{-e})$, 則 $a^{\frac{1}{e}} < \log_a \frac{1}{e}$。

定理1: 令 n_a 表指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ 交點的個數, 則

(1) $n_a = 3$ 當 $a \in (0, e^{-e})$,

(2) $n_a = 1$ 當 $a = e^{-e}$, (指數、對數函數圖形與法線 $y = x$ 的交點 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$),

(3) $n_a=1$ 當 $a\in(e^{-e},1)$,

(4) $n_a=2$ 當 $a\in(1,e^{1/e})$,

(5) $n_a=1$ 當 $a=e^{1/e}$, (指數、對數函數圖形與切線 $y=x$ 的切點 (e,e)),

(6) $n_a=0$ 當 $a>e^{1/e}$.

二. 交點的探索

2-1 指數與對數函數圖形, 當底數 a 由小到大漸增, 交點數由2變1 (或1變0) 的臨界值為何?

兩函數 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形, 以直線 $y=x$ 對稱, 當底數 a 由小而大變動, 使得兩函數由2個交點, 如圖 (2), 恰好變成1個交點 (x_0,x_0) 時, 如圖 (1), 則直線 $y=x$ 是 $y=a^x$ 在點 (x_0,x_0) 之切線, 在此情況下, 底數 a 眞值爲何? 此時 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 與 $y=x$ 三者之交點坐標 (x_0,x_0) 爲何?

當 $y=x$ 是 $y=a^x$ 的切線時, 設 $y=x$ 與 $y=a^x$ 切在一點 (x_0,x_0), 其切線斜率爲 1, 且指數函數的圖形與直線交在一點 (x_0,x_0), 得到下列聯立方程組

$$\begin{cases} 1=a^{x_0}\cdot\ln a\ldots\ldots(1)\\ x_0=a^{x_0}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}\quad 由(1)\quad 1=a^{x_0}\cdot\ln a\Rightarrow a^{x_0}=\frac{1}{\ln a}\Rightarrow x_0=\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right),$$

分別將 $a^{x_0}=\frac{1}{\ln a}$ 及 $x_0=\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$ 代入 (2) 的右邊與左邊, 得到

$$\begin{aligned}&\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}\Rightarrow\frac{\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)=1\\ &\Rightarrow\frac{1}{\ln a}=e\Rightarrow\ln a=\frac{1}{e}\Rightarrow a=e^{\left(\frac{1}{e}\right)}\approx 1.444668,\end{aligned}$$

將 $a^{x_0}=x_0$ 及 $a=e^{\left(\frac{1}{e}\right)}$ 代入 (1), $x_0\ln a=1\Rightarrow x_0=\frac{1}{\ln a}=e$, 即交點坐標爲 (e,e)。

2-2 指數與對數函數圖形, 當底數 a 由小到大漸增, 交點數由3變1的臨界值為何?

兩函數 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形, 以直線 $y=x$ 對稱, 當底數 a 由小到大變動, 使得兩函數由3個交點, 如圖 (5), 變成1個交點 (x_0,x_0) 時, 如圖 (6), 直線 $y=x$ 是 $y=a^x$ 在點 (x_0,x_0) 之法線。在此情況下, 底數 a 眞值爲何? 此時 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 與 $y=x$ 三者之交點坐標 (x_0,x_0) 爲何?

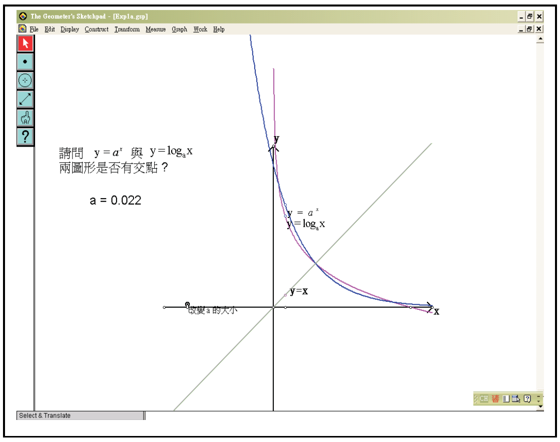

圖5. $a \approx 0.022$ 時有三個交點

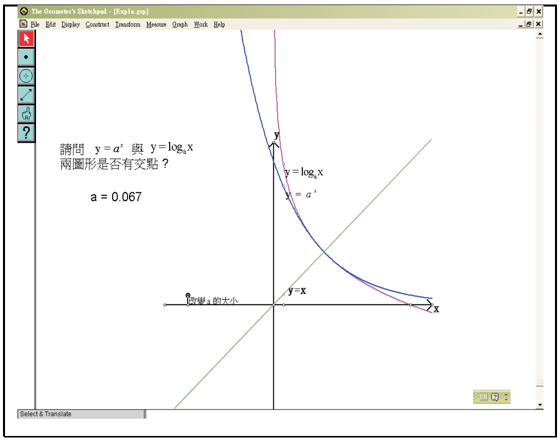

圖6. $a \approx 0.066$ 恰一個交點

當 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 由3交點變成1交點, 使得有共同切線時, 如圖 (6), 其切線斜率是 -1, 此時 $y = x$ 是 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 共同的法線, 在這個情形下, $y = x$ 與 $y = a^x$ 交在一點 (x_0, x_0), 得到聯立方程組 $\begin{cases} -1 = a^{x_0} \cdot \ln a \dots\dots (1) \\ x_0 = a^{x_0} \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$ 由 (1) $a^{x_0} \cdot \ln a = -1 \Rightarrow a^{x_0} = \frac{-1}{\ln a} \Rightarrow x_0 = \log_a \left(\frac{-1}{\ln a}\right)$, 分別將 $a^{x_0} = \frac{-1}{\ln a}$ 及 $x_0 = \log_a \left(\frac{-1}{\ln a}\right)$ 代入 (2) 的右邊與左邊, $\log_a \left(\frac{-1}{\ln a}\right) = \frac{-1}{\ln a} \Rightarrow a = e^{-e} \approx 0.065988$, 將 $a^{x_0} = x_0$ 及 $a = e^{-e}$ 代入 (1) 式, 得交點座標爲 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$。

2-3 以 $a = 0.022$ 為例, 如圖 (5), 如何求得這三點的座標?

指數與對數函數都是超越函數, 無法直接用 Maple 的 solve 指令, 解方程式 $0.022^x - \log_{0.022} x = 0$ 的實根。

```
> solve(0.022^x-ln(x)/ln(0.022)=0,x);
```

$$.2166793136 - 2.186447693I$$

把 $(0.022)^x$ 轉成 $e^{x \cdot \ln(0.022)}$, 則可求得其中一個近似根。

```
> solve(exp(x*ln(0.022))-ln(x)/ln(0.022)=0,x);
```

$$.8721667195$$

如果用浮點數解 fsolve , 也可求得一個近似根。

```
> fsolve(0.022^x-ln(x)/ln(0.022)=0,x);
```

$$.03583572764$$

先畫函數圖形, 看出根大概的位置, 再分別用三個接近三根的起始值, 根據牛頓法迭代五次解出三個近似根。

```
> g:=x->0.022^x-ln(x)/ln(0.022);
```

$$g := x \to .022^x - \frac{\ln(x)}{\ln(.022)}$$

```
> plot(g(x),x=0..1);
> newton:=x->x-g(x)/D(g)(x);
```

$$newton := x \to x - \frac{g(x)}{D(g)(x)}$$

```
> (newton@@5)(0.001);
```

$$.03551655656$$

```
> (newton@@5)(0.2);
```

$$.3082984959$$

```
> (newton@@5)(0.8);
```

$$.8721667195$$

這與 fsolve 指令用相同的起始值代入的結果是非常接近的。

```
> fsolve(g(x),x=0.001);
```

$$.03583572764$$

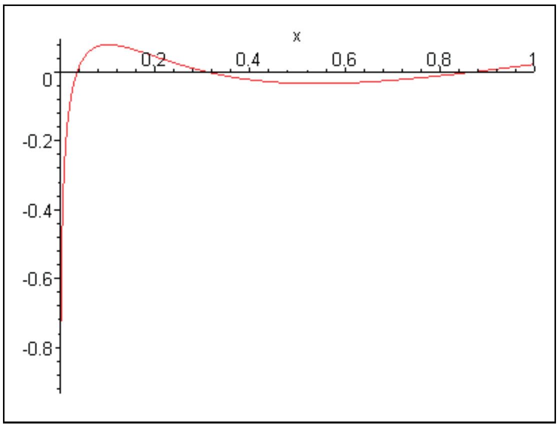

圖7. 函數 $g(x)=0.022^x-\log_{0.022} x$ 的圖形

```
> fsolve(g(x),x=0.2);
```

$$.3082984958$$

```
> fsolve(g(x),x=0.8);
```

$$.8721667195$$

經由前述三個過程, 我確信當 $a \in (0, e^{-e})$ 時, 有三個交點。根據以上的實驗、討論與求解, 我將觀察 EXCEL、Maple、GSP 程式的結果綜合整理如下: 當底數為 a 時, 交點的個數與交點 x 坐標的範圍:

1. $a \in (0, e^{-e})$, 有三個交點: 如圖(8-1), 令中間交點為 $M(\alpha, \alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{e})$。左邊交點的 x 坐標介於 $(0, \alpha)$, 右邊交點的 x 坐標介於 $(\frac{1}{e}, 1)$。
2. $a = e^{-e}$, 恰有一個交點 (指數、對數函數圖形與法線 $y = x$ 的交點): 如圖 (8-2), 交點的坐標為 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.
3. $a \in (e^{-e}, 1)$, 有一個交點: 如圖 (8-3), 交點的 x 坐標介於 $(\frac{1}{e}, 1)$.
4. $a \in (1, e^{(\frac{1}{e})})$, 有兩個交點: 如圖 (8-4), 左邊交點的 x 坐標介於 $(1, e)$, 右邊交點的 x 坐標介於 (e, ∞).
5. $a = e^{(\frac{1}{e})}$, 恰有一個交點 (指數、對數函數圖形與切線 $y = x$ 的切點): 如圖 (8-5), 交點的坐標為 (e, e).
6. $a > e^{(\frac{1}{e})}$, 如圖 (8-6), 沒有交點。

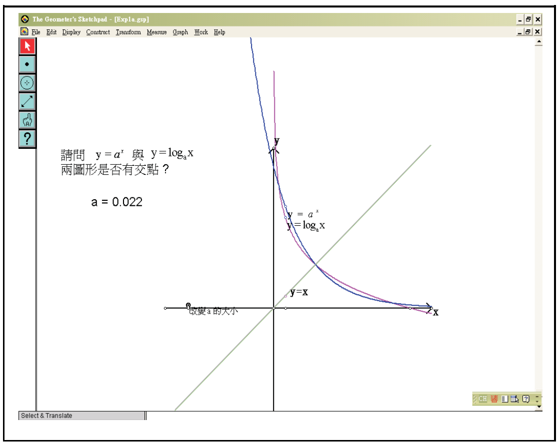

圖8-1. 當 $0 < a < e^{-e}$ 時有三個交點

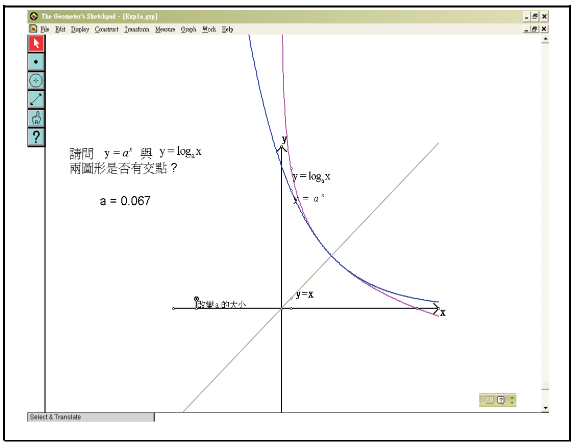

圖8-2. 當 $a = e^{-e} \approx 0.066$ 恰一交點 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

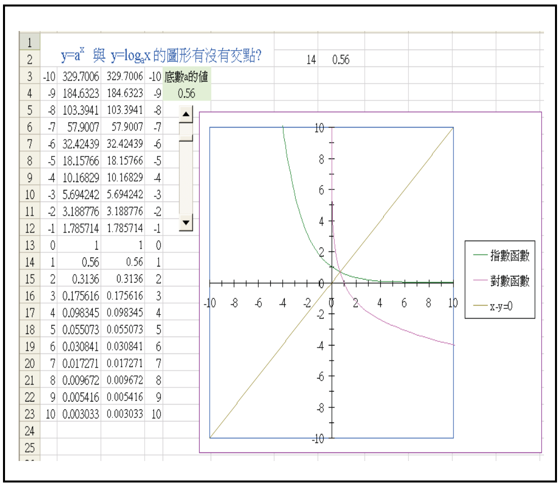

圖8-3. $a\in(e^{-e},1)$ 有一個交點

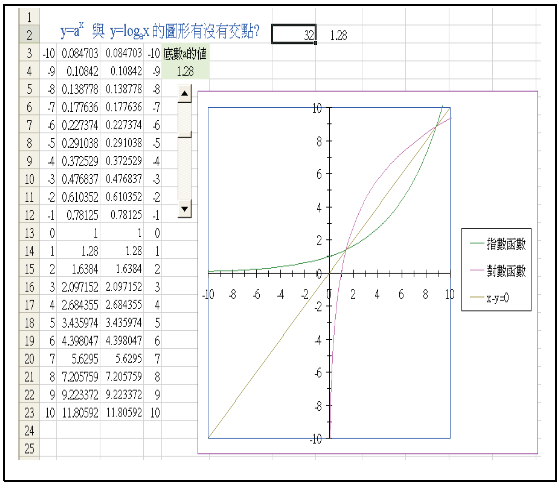

圖8-4. $a\in(1,e^{(\frac{1}{e})})$ 有兩個交點

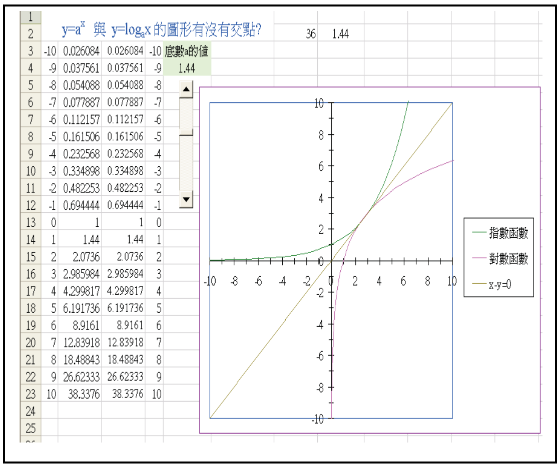

圖8-5. $a=e^{(\frac{1}{e})}\approx 1.4446$, 恰有一個交點

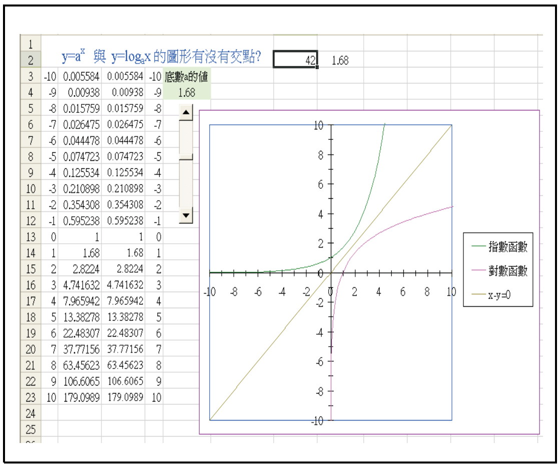

圖8-6. $a>e^{(\frac{1}{e})}\approx 1.4446$, 沒有交點

三、解析的證明

同底數的指數函數與對數函數, 可能有3個交點或2個交點, 要如何證明?

系理1:

a. 當 $x>0$, $e^x>1+x$。

b. 當 $m=10^k$, $k\in N$, $n\geq[\sqrt{2m}]+1$ 時, 不等式 $e^{(1+\frac{n}{m})}>\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e$ 成立, 其中 $[x]$ 代表高斯符號.

後續在證明指數對數圖形有3交點時, 我們會用到一系列如系理1. 的不等式。由 e^x 在 $x=0$ 的泰勒展開式爲 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$, 故系理1.a 得證。

當 $m=10^k$, $k\in N$, $n\geq[\sqrt{2m}]+1$ 時, 令 $x=\frac{n}{m}$, 則 $x>0$, 將 x 代入不等式 $e^{\left(1+\frac{n}{m}\right)}>\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e$, 得 $e^{(1+x)}>\left(1+x+\frac{1}{m}\right)e$。但是 e^x 在 $x=0$ 的泰勒展開式 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$, 收斂在任意實數 x, 由下列互爲充要條件的不等式,

$$e^{(1+x)}>\left(1+x+\frac{1}{m}\right)e\Leftrightarrow e^x>\left(1+x+\frac{1}{m}\right)\Leftrightarrow\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\cdots>\frac{1}{m}.$$

只要取 $x>\sqrt{\frac{2}{m}}$, 不等式必成立。由 $x=\frac{n}{m}$, $\frac{n}{m}>\sqrt{\frac{2}{m}}\Rightarrow n>\sqrt{2m}$。
故當 $n\geq[\sqrt{2m}]+1$ 時, 不等式 $e^{\left(1+\frac{n}{m}\right)}>\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e$ 成立, 故系理1.b 得證。

指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 有三個交點時, 底數 a 所在的範圍是 $(0,e^{-e})$, 我們可將它分割成無限多個半開區間的聯集 (對固定的自然數 m), 即 $(0,e^{-e})=\bigcup_{n=0}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e},e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e})$, $m=10^k$, $k\in N$。例如, 取 $m=100$, 則當 $n=0$ 時, 半開區間爲 $[e^{-\left(1+\frac{1}{100}\right)e},e^{-e})$。當 $n=1$ 時, 半開區間爲 $[e^{-\left(1+\frac{2}{100}\right)e},e^{-\left(1+\frac{1}{100}\right)e})\cdots$ 等等, 這些半開區間會由 e^{-e} 向左, 逐漸將 $(0,e^{-e})$ 涵蓋起來。當 $a\in(0,e^{-e})$ 時, a 必定屬於某一個半開區間, 當

$$e^{-\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e}\leq a<e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e}\tag{A}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{e^{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)}}\leq a^{\frac{1}{e}}<\frac{1}{e^{\left(1+\frac{n}{m}\right)}}\tag{1}$$

又由 (A) 式取自然對數可得

$$-\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e\leq\ln a<-\left(1+\frac{n}{m}\right)e$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e}\leq\log_a\frac{1}{e}<\frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}\right)e}\tag{2}$$

給定 $m=10^k$, $k\in N$, 對任意底數 $a\in(0,e^{-e})$, 用到下列不等式 (B) (即系理 1.b)

$$\frac{1}{e^{\left(1+\frac{n}{m}\right)}}<\frac{1}{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e}\Leftrightarrow e^{\left(1+\frac{n}{m}\right)}>\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e\tag{B}$$

則由 (1) (2) 兩式合併即可得

$$\frac{1}{e^{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)}}\leq a^{\frac{1}{e}}<\frac{1}{e^{\left(1+\frac{n}{m}\right)}}<\frac{1}{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e}\leq\log_a\frac{1}{e}<\frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}\right)e}$$

因而, 當 $a\in(0,e^{-e})$ 時, 我們就能得到不等式 $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$, 後續我們想要用勘根定理來證明指數、對數函數有三個交點時, 這是一個關鍵性的不等式。

引理 1. 的證明: 可是當自然數 m 給定時, 我們把 $(0,e^{-e})$ 分割成爲 $\bigcup_{n=0}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e}$, $e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e})$, 卻總有幾個小的 n 值對應的半開區間 $[e^{-\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e},e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e})$ 無法滿足不等式

(B)。但是不打緊, 系理1.b. 如果取 $n\geq[\sqrt{2m}]+1$, 對於這些能滿足不等式 (B) 的半開區間的聯集 $\bigcup_{n=[\sqrt{2m}]+1}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{m}\right)e}, e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e})$, 把 m 逐漸增大, 其上限 $e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e}$, 卻能夠逐漸逼近 e^{-e}。

因爲, 如果取 $n=[\sqrt{2m}]+1$, $\sqrt{2m}\leq n\leq\sqrt{2m}+2\Rightarrow\frac{\sqrt{2m}}{m}\leq\frac{n}{m}\leq\frac{\sqrt{2m}+2}{m}$, 由夾擠定理, 與 $\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2m}}{m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2m}+2}{m}=0$, 得到 $\lim_{m\to\infty}e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e}=e^{-e}$, 於是只要 m 取得足夠大, 當 $a\in(0,e^{-e})$ 時, 我們仍能得到 $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$ 的結果。

例如: 由系理1.b, 取 $m=100$, 當 $n\geq[\sqrt{2m}]+1=15$, 由系理1.a., 用數學歸納法也可以證得 $e^{\left(1+\frac{n}{100}\right)}>\left(1+\frac{n+1}{100}\right)e$, 亦即 $\bigcup_{n=15}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{100}\right)e}, e^{-\left(1+\frac{n}{100}\right)e})$ 爲 $(0,e^{-e})$ 的子集合, 當 $a\in\bigcup_{n=15}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{100}\right)e}, e^{-\left(1+\frac{n}{100}\right)e})$ 時, $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$ 成立。此時 $\bigcup_{n=15}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{100}\right)e}, e^{-\left(1+\frac{n}{100}\right)e})$ 的上限爲 $e^{-\left(1+\frac{15}{100}\right)e}\approx 0.04389196075$。

由系理1.b, 取 $m=1000$, 當 $n\geq[\sqrt{2m}]+1=45$, 仿上法也可證得 $e^{\left(1+\frac{n}{1000}\right)}>\left(1+\frac{n+1}{1000}\right)e$。亦即, 當 $a\in\bigcup_{n=45}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{1000}\right)e}, e^{-\left(1+\frac{n}{1000}\right)e})$, $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$ 成立。此時 $\bigcup_{n=45}^{\infty}[e^{-\left(1+\frac{n+1}{1000}\right)e}, e^{-\left(1+\frac{n}{1000}\right)e})$ 的上限 $e^{-\left(1+\frac{45}{1000}\right)e}\approx 0.05839035774$。這兩個會使得不等式 $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$ 成立的上限 $e^{-\left(1+\frac{15}{100}\right)e}$、$e^{-\left(1+\frac{45}{1000}\right)e}$, 隨著 m 的增大而逐漸逼近 e^{-e}。因此我們仍可證得 $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$, 故引理1得證。

下面藉由 Maple 計算出 $m=10^2\sim 10^{19}$ 的 m, n, $e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e}$ 値。

```
> for i from 2 by 1 to 19 do
      m:=10^i:
      n:=floor(m*(2/m)^.5)+1:
      r:=evalf(exp(-(1+n/m)*exp(1))):
      print(m,n,r);
end do:
```

100, 15, .04389196075

1000, 45, .05839035774

10000, 142, .06348945626

100000, 448, .06518931323

1000000, 1415, .06573470905

10000000, 4473, .06590785064

100000000, 14143, .06596267185

1000000000, 44722, .06598001440

$$10000000000,\ 141422,\ .06598549921$$
$$100000000000,\ 447214,\ .06598723373$$
$$1000000000000,\ 1414214,\ .06598778222$$
$$10000000000000,\ 4472136,\ .06598795570$$
$$100000000000000,\ 14142136,\ .06598801060$$
$$1000000000000000,\ 44721360,\ .06598802783$$
$$10000000000000000,\ 141421357,\ .06598803337$$
$$100000000000000000,\ 447213596,\ .06598803515$$
$$1000000000000000000,\ 1414213563,\ .06598803568$$
$$10000000000000000000,\ 4472135955,\ .06598803588$$

e^{-e} 的近似值

```
> evalf(exp(-exp(1)));
```

$$.06598803588$$

當 $m=10^{19}$, 使不等式 $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$ 成立的 a 值上限 $e^{-\left(1+\frac{n}{m}\right)e}$ 與 e^{-e} 有11位小數相同。

定理1. 的證明: 我們只需證明 (1) 與 (4) 兩部分。

(1): 當底數 $a=e^{-e}$ 時, $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形均與直線 $\frac{y-\frac{1}{e}}{x-\frac{1}{e}}=-1$, 相切在一點 $(\frac{1}{e},\frac{1}{e})$, 其切線斜率為 -1 (如2-2的說明)。當 a 變得比 e^{-e} 更小時, $y=a^x$ 遞減, $y=x$ 遞增, 必有交點, 令交點 $M(\alpha,\alpha)$, 則 M 介於兩點 $(0,0)$ 與 $(\frac{1}{e},\frac{1}{e})$ 之間, 如圖 (9), 且 $y=a^x$ 在 M 的切線斜率小於 -1。而 $y=a^x$ 之切線斜率為 -1 的點 A, 落在 $M(\alpha,\alpha)$ 之右邊, 由聯立方程組 $\begin{cases} y=a^x \\ y'=a^x\cdot\ln a=-1\end{cases}$, 解得 A 點座標為 $(\log_a(\log_a\frac{1}{e}),\log_a\frac{1}{e})$, 由於 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形以直線 $y=x$ 成對稱, 故 $y=\log_a x$ 之切線斜率為 -1 的點 B 座標為 $(\log_a\frac{1}{e},\log_a(\log_a\frac{1}{e}))$, B 落在 M 點的左邊。函數 $f(x)=\log_a x-a^x$ 為一個連續函數, 由引理1: 當 $a\in(0,e^{-e})$, $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$。把兩邊加對數, 由 $0<a<1$, $\log_a(a^{\frac{1}{e}})>\log_a(\log_a\frac{1}{e})\Rightarrow\frac{1}{e}>\log_a(\log_a\frac{1}{e})\Rightarrow\log_a\frac{1}{e}<\log_a(\log_a(\log_a\frac{1}{e}))$, 故將 A 點的 x 座標代入函數 $f(x)=\log_a x-a^x$, $f(\log_a(\log_a\frac{1}{e}))=\log_a(\log_a(\log_a\frac{1}{e}))-\log_a\frac{1}{e}>0$, 且 $f(1)=\log_a 1-a^1<0$, 由勘根定理, 方程式 $f(x)=\log_a x-a^x=0$ 在 $(\log_a(\log_a\frac{1}{e}),1)$ 之間必有一實根, 亦即 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形, 在 $(\log_a(\log_a\frac{1}{e}),1)$ 之間必有一交點, 由於 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形以直線 $y=x$ 成對稱, 因此 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形, 必有另一交點在 $(0,\log_a\frac{1}{e})$ 之間, 而且 M 是必然的交點, 由此證得有三交點。

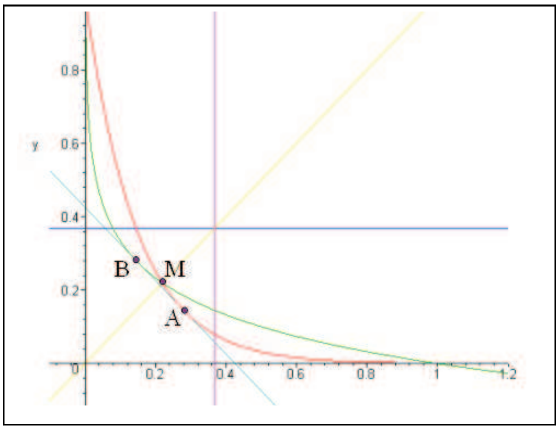

圖9. 指數與對數切線斜率爲 -1 的切點 A, B 以及中間交點 M,
鉛直線爲 $x=\frac{1}{e}$, 水平線爲 $y=\frac{1}{e}$。

(4): 如圖 8-4 當 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 時, 令 $g(x)=x-a^x$, $g(1)=1-a^1<0$, 由 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$, $a^e<(e^{\frac{1}{e}})^e=e$, 故 $g(e)=e-a^e>0$, 由勘根定理知, 方程式 $g(x)=x-a^x=0$ 在 $(1,e)$ 之間必有一實根, 亦即 $y=x$ 與 $y=a^x$ 在 $(1,e)$ 間必有一個交點。又由 $a>1$, 當 x 足夠大時, 必能使得 $g(x)=x-a^x<0$, 故方程式 $g(x)=x-a^x=0$ 在 (e,∞) 之間必有一實根, 即 $y=x$ 與 $y=a^x$ 在 (e,∞) 間必有另一個交點, 由於 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形以直線 $y=x$ 成對稱, 故 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形在 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 時, 有二個交點。證畢。

除了可用牛頓法解方程式 $f(x)=\log_a x-a^x=0$ 根, 得到中間交點 $M(\alpha,\alpha)$ 的 x 座標 α 之外, 由引理1. $a\in(0,e^{-e})$, 滿足不等式 $a^{\frac{1}{e}}<\log_a\frac{1}{e}$。令 $\log_a^{(n)}\frac{1}{e}$ 爲將 $\frac{1}{e}$ 加 n 次 $\log_a$ 之後的值, 由底數 $0<a<1$, 兩邊連續加對數之後可得到

$$\frac{1}{e}>\log_a^{(2)}\frac{1}{e}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\quad \log_a\frac{1}{e}<\log_a^{(3)}\frac{1}{e}\cdots\cdots(2)\quad \log_a^{(2)}\frac{1}{e}>\log_a^{(4)}\frac{1}{e}\cdots\cdots(3)$$
$$\log_a^{(3)}\frac{1}{e}<\log_a^{(5)}\frac{1}{e}\cdots\cdots(4)\quad \log_a^{(4)}\frac{1}{e}>\log_a^{(6)}\frac{1}{e}\cdots\cdots(5)\quad \log_a^{(5)}\frac{1}{e}<\log_a^{(7)}\frac{1}{e}\cdots\cdots(6)$$

由上面的不等式 (2) (4) (6) 以及 (1) (3) (5) 可得到

$$\log_a\frac{1}{e}<\log_a^{(3)}\frac{1}{e}<\log_a^{(5)}\frac{1}{e}<\log_a^{(7)}\frac{1}{e}\cdots<\log_a^{(6)}\frac{1}{e}<\log_a^{(4)}\frac{1}{e}<\log_a^{(2)}\frac{1}{e}<\frac{1}{e}.$$

換言之, 由上面的不等式震盪收斂, 可得到 $\alpha=\lim_{n\to\infty}(\log_a^{(n)}\frac{1}{e})$, 如圖 (10)。
我們用下列 Maple 程式進一步的說明: 取0.0001爲底數 a

```
> a:=0.0001;
```

$$a:=.0001$$

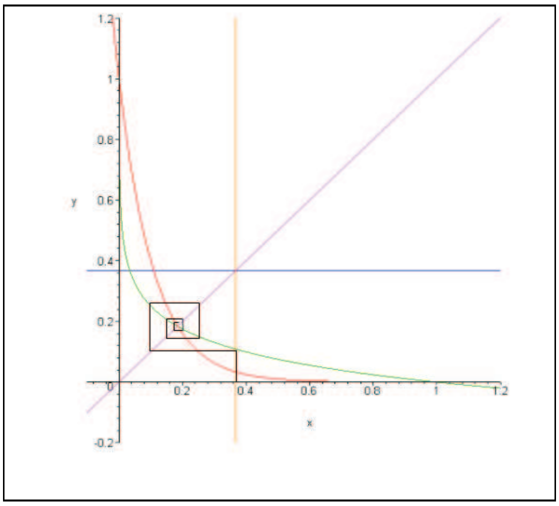

圖10. 由 $\frac{1}{e}$ 作 n 次迭代, $\log_a^{(n)}\frac{1}{e}$ 收斂在 $M(\alpha,\alpha)$。

解方程式 $\ln(x)/\ln(a)-(a)^x=0$ 的三根, 即三個交點的 x 坐標。

```
> fsolve(ln(x)/ln(a)-(a)^x=0,x=0.001);
```

$$.0001008588596$$

```
> fsolve(ln(x)/ln(a)-(a)^x=0,x=0.32);
```

$$.1838714341$$

```
> fsolve(ln(x)/ln(a)-(a)^x=0,x=0.9);
```

$$.9990714869$$

定義對數函數 f

```
> f:=x->ln(x)/ln(a);
```

$$f := x \rightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

設起始值爲 $1/e$

```
> b:=exp(-1);
```

$$b := e^{(-1)}$$

迭代1, 2, 3次的值

```
> (f@@1)(b);
```

$$.1085736205$$

```
> (f@@2)(b);
```

$$.2410689200$$

```
> (f@@3)(b);
```

$$.1544646944$$

迭代41,42次的值, 與中間交點 $M(\alpha,\alpha)$ 的 x 坐標 α, 已經有10位小數相同。

```
> (f@@41)(b);
```

$$.1838714341$$

```
> (f@@42)(b);
```

$$.1838714341$$

四. 結語

資訊科技融入數學教學, 對老師的幫助、影響相當大, 也是數學老師將來必須面對而不可迴避的競爭, 由於 Excel 的普遍, 使得函數圖形的呈現很方便, 在課堂上我們使用較多。但是若非顏貽隆老師的 GSP 協助, 我們很難看出指數、對數函數居然有三個交點的時候, 當學生發現連老師都不知道的現象, 那種心情一定很興奮。也由於蔡敏娟老師、陳明君老師分別解得臨界值 $e^{(\frac{1}{e})}$、e^{-e}, 引起我繼續實驗研究的動機。在這裡我特別要感謝這三位老師對本文的貢獻, 最後藉由 Maple 解出交點坐標, 證出爲什麼會有三個交點, 算是畫下句點。期間教與學的樂趣洋溢在討論與互動之中, 我的指導教授交通大學應用數學系黃大原老師, 提供本文許多寶貴的修正意見尤其是解析證明的部分。花蓮師院數學教育學系袁媛老師, 一直擔任指導、鼓勵我們的角色, 最要感謝他們兩位。

—本文作者李政豐任教於竹南高中, 顏貽隆任教於實驗高中, 蔡敏娟任教於新竹女中, 陳明君任教於大灣高中—