數學大師們的偶然失誤

吳振奎

數學是嚴謹的藝術, 它拒絕一切醜陋和不眞。

然而, "金無足赤, 人無完人", 縱然你是學界泰斗, 哪怕你是科壇巨擘, 你總會有閃失 (俗說: 老虎也會打盹), 數學家肯定也不例外。我們這兒當然不是議論他們的人品, 而是談談他們在數學上的偶然失誤。常說 "瑕不掩瑜", 大師的這些失誤絲毫不會影響他們光輝, 倒會增加他們的眞實與親切。

衆所周知: 數學結論 (命題、定理、公式、......) 的給出往往是數學家們深思熟慮、甚至終生不懈的努力使然, 而這些結論產生的方法多是由具體的抽象、特例的推廣以及不完全歸納所獲。因而這其中的失誤幾乎不可避免。値得一提的是: 由於這些失誤出自大家之手, 因而它們往往更具欺騙性且更難爲人們所識破, 這一方面是鑑於大師們的權威與聲望, 一方面是由於結論或貌似無瑕或難以核驗或熟視無睹, 因而要找到推翻命題的反例是困難和艱澀的。

本文試圖獵取幾例以饗讀者。我們的目的是想從中學點做數學的道理和方法, 體味數學的魅力與美妙, 當然也會令我們從中悟感數學 (乃至整個科學) 發展的艱難與坎坷, 同時更能品鑑數學的嚴謹與純眞。

1. 費爾馬 (P. de Fermat) 數

法國業餘數學家費爾馬一生有過許多重要數學發現, 這些大多都記錄在他研讀過的書籍空白處, 他發現的著名命題如:

費爾馬小定理: 若 p 是質數, $a \in \mathbb{Z}$, 且 $p \nmid a$, 則 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$。

費爾馬大定理: 若 $n \in \mathbb{N}$, 且 $n \geq 3$, 則方程 $x^n + y^n = z^n$ 無非平凡整數解。

前者爲費爾馬本人及後來的學者證得; 後者記在他閱讀過的丟番圖 (Diophantus) 所著「算術」一書的空白處 (1637年, 但未給出證明)。四百餘年後 (1994年), 這一結論爲美國普林斯頓大學的數學家威爾斯 (A. J. Wiles) 經近十年潛心研究所解決, 成爲上個世紀數學成就中最爲耀眼的輝煌、最爲美妙的終曲。其中經歷的艱辛與磨難令人感嘆! 由此他也榮獲1996年沃爾夫 (R. S. L. Wolf) 獎。

正是這位費爾馬, 當他驗算了

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

在 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 時分別為:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17,$$
$$F_3 = 257, \quad F_4 = 65537,$$

發現它們都是質數後便聲稱:

對於任何自然數 n, F_n 均給出質數。

然而, 1732年歐拉 (L. Euler) 指出, 當 $n = 5$ 時:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$$

已不再是質數。

1880年, 蘭道 (Landon) 算得:

$$F_6 = 274177 \times 67280421310721$$

亦非質數。

帶有費爾馬批註的巴歇譯「亞歷山大的丟番圖算術」封面

1905年莫瑞漢德 (J. C. Morehead) 和威斯坦 (Western) 證明 F_7 亦是合數。

時至今日, 人們在 F_n 型數中除了費爾馬給出的五個質數外, 尚未發現其他質數。於是有人 (Selfridge) 提出猜測: [15]

F_n 型數中除 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 外不會有其他質數。

然而此項猜測至今未獲證明。下表給出某些 F_n 型數的資料: [11] [16]

n 值	F_n 研究進展
$0 \sim 4$	質數
$5 \sim 11$	合數, 且找到分解式
12, 13, 15 ∼ 19, 21, 23, 25 ∼ 27, 30, 32, 38, 39, 42, 52, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 316, 329, 334, 398, 416, 452, 544, 556, 637, 692, 744, 931, 1551, 1945, 2023, 2089, 2456, 3310, 4724, 6537, 6835, 9428, 9448, 23471	合數, 且知其部分因子
14, 20, 22	合數, 因子不詳
24, ...	不知其為質數還是合數

前20個費馬數的分解情況[1]

n	$F_n=2^{2^n}+1$ 的分解
$0\sim 4$	3, 5, 17, 357, 65537 (質數)
5	641×6700417
6	$274177\times 67280421310721$
7	$59649589127497217\times p_{22}$ (p_k 代表 k 位的質數, 下同)
8	$1238926361552897\times p_{62}$
9	$2424833\times 7455602825647884208337395736200454918783366342657\times p_{99}$
10	$45592577\times 6487031809\times 4659775785220018543264560743076778192897\times p_{252}$
11	$319489\times 974849\times 167988556341760475137\times 3560841906445833920513\times p_{564}$
12	$114689\times 26017793\times 63766529\times 190274191361\times 1256132134125569\times c_{1187}$ (c_k 代表 k 位合數, 下同)
13	$2710954693361\times 2663848877152141313\times 3603109844542291969$ $\times 319546020820551643220672513\times c_{2391}$
14	c_{4933}
15	$1214251009\times 2327042503868417\times c_{9840}$
16	$825753601\times c_{19720}$
17	$31065037602817\times c_{39444}$
18	$13631489\times c_{78906}$
19	$70525124609\times 646730219521\times c_{157804}$

註: 關於費馬數的分解進展不斷有消息披露, 稍前的情況如:

1971年布裡罕德 (J. Brillhart) 和莫瑞森 (M. Morrison) 用電子計算機 IBM360-91 花1.5小時機上時間找到 F_7 的兩個質因子 (除上表給出的一個外, 另一個是 5704689200685129054721。)

1981年兩位數學家在 Univac 1100/42 電子計算機上花2小時找到 F_8 的一個16位質因子, 另一個爲62位 (但不知其是否爲質數)。

1977年威廉姆 (Wilianm) 證明 F_{3310} 是合數, 且有因子 $5\cdot 2^{3313}+1$。

1980 年哥廷汀 (Goltinting) 證明 F_{17} 是合數。

1987年德國漢堡大學的凱勒 (W. Keller) 在電子計算機上找到 F_{23471} 的一個質因子 (約7000位)。

1990年美國加州大學伯克萊分校的萊斯特拉 (H. W. Lenstra, Jr.) 等人分解了 F_9。

同年, 澳洲國立大學的布瑞特 (R. P. Brent) 分解了 F_{10} (使用橢圓曲線法 ECM), 且找到了它的一個40位的質因子。

1992年, 裡德學院的柯蘭克拉裡 (R. E. Cranclall) 和德尼亞斯 (Doenias) 證明了 F_{22} 是合數。

截至目前, 人們已經證明 $5 \leq n \leq 19$ 時 F_n 皆為合數, 但 F_{14} 的因子卻一直未能找到。

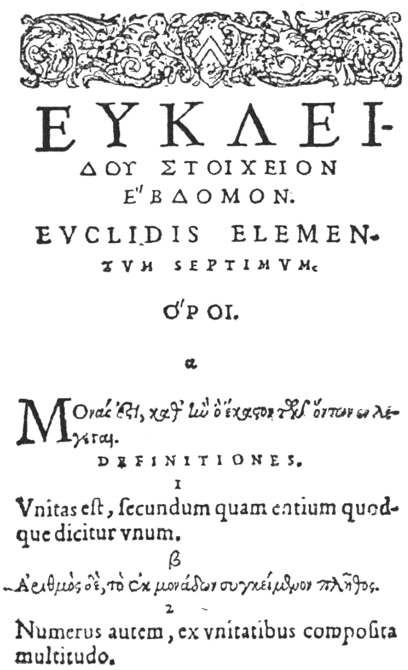
順便一提: 高斯 (C. F. Gauss) 曾在19歲時發現且證明了:

尺規可作正 n 邊形 $\Longleftrightarrow$ $n \geq 3$ 且 n 的最大奇因子是不同的費爾馬質數之積。

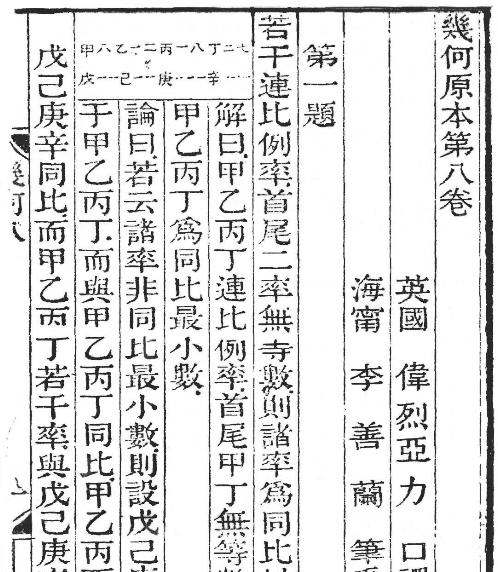
高斯本人給出正17邊形作法 ($F_3 = 17$), 之後德國人路利 (J. Lowry) 給出正257 (F_4) 邊形、海默斯 (Hermes) 完成正65537 (F_5) 邊形尺規作圖。

2. 梅森 (M. Mersenne) 質數

公元前300多年, 古希臘學者歐幾里得在其「幾何原本」中給出 “完全數” 概念, 所謂完全數係指 “恰好等於自身的全部眞因子之和的數”, 像 6、28、496、8128、... 均為完全數 (比如 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ 等)。完全數因具有某些奇妙特性而倍受一些學者的青睞, 有人稱之為自然數中的瑰寶。



「幾何原本」希臘文、拉丁文對照本首頁 (1573年)



李善蘭譯漢文「幾何原本」首頁

「原本」中還給出一個判定完全數的命題:

若 2^p-1 是質數, 則 $(2^p-1)2^{p-1}$ 是完全數。

1730年, 歐拉給出關於它的另一個結論:

若 n 是一個偶完全數, 則 n 必有 $2^{p-1}(2^p-1)$ 形狀, 其中 2^p-1 爲質數。

這兩個命題綜合起來使得 (偶) 完全數與 2^p-1 型質數完全對應起來。

1644年法國神父、業餘數學家梅森在「物理學與數學的深思」一書中宣稱:

當 $p=2$、3、5、7、13、17、19、31、67、127、257時, 2^p-1 是質數 (下記 $M_p=2^p-1$, 且稱之爲梅森數, 其中的質數稱梅森質數)。

由於梅森本人僅僅驗算了其中的前7個, 而後面的一些因其太大而不便核驗, 但人們似乎對此篤信不二。

1903年美國哥倫比亞大學的科爾 (F. N. Cole) 在紐約的一次科學報告會上, 做了一次無聲的發言, 他只是在黑板上寫到:

$$\begin{aligned}2^{67}-1&=147573952589676412927\\&=193707721\times 761838257287.\end{aligned}$$

之後便贏得全場一片經久的掌聲。顯然, 他否定了梅森數表中 $p=67$ 時 $2^{67}-1$ 是質數的猜測。

1911年, 鮑威爾 (R. E. Power) 又發現 M_{89} 是質數 (梅森數表中漏掉了)。

1922年, 克萊希克 (M. Kraitchik) 指出 M_{257} 亦不是質數 (他的證明是非構造性的, 儘管他當時並未找出該數的哪怕任一個質因子)。這正像波蘭數學家斯坦因豪斯 (H. D. Steinhaus) 在其名著「數學一瞥」中記述的 (20世紀50年代):

七十八位數 $2^{257}-1=231\ 584\ 178\ 474\ 632\ 390\ 847\ 141\ 970\ 017\ 375\ 815\ 706\ 539\ 969\ 331\ 281\ 128\ 078\ 915\ 168\ 015\ 826\ 259\ 279\ 871$ 是合數, 可以證明它有因子, 儘管人們尚未找到它。

它的因子直到1984年才由美國桑迪亞 (Sandia) 國家實驗室的科學家找到。

此後人們尋找梅森質數的工作一直未曾間斷, 到2001年11月止, 人們共找到39個梅森質數 M_p, 這些 p 值分別是:

2、3、5、7、13、17、19、31、61、89、107、127、521、607、1279、2203、2281、3217、4253、4423、9689、9941、11213、19937、21701、23209、44497、86243、110503、132049、216091、756839、859433、1257787。

顯然, 人們至此也相當於找到39個偶完全數。[1]

接下來的問題是: 是否有無窮多個梅森質數? 這一點尚無定論。

不過, 1964年吉利斯 (D. B. Gillies) 給出下面的猜測: [17] 小於 x 的梅森質數個數約為 $\frac{2\ln\ln x}{\ln 2}$。

關於完全數, 由於至今人們找到的全部是偶數, 因而 "有無奇完全數存在" 的這樣一個話題被提了出來, 這也是一個至今尚未被解開的謎。

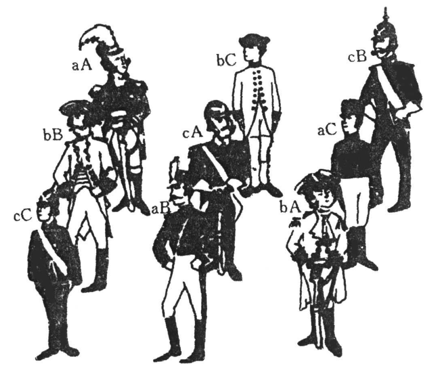
不過, 1989年布倫特 (R. P. Brent) 指出: [18] 若奇完全數存在, 則它須大於 10^{160}。

3. 正交拉丁方猜想

據說當年普魯士腓德烈大帝在閱兵時問歐拉:「從三個不同的兵團各抽出三名不同軍銜的軍官, 能否把他們排成一個 3×3 方陣, 使每行、每列皆有不同兵團、又有不同軍銜的代表?」

問題不難解答, 我們用 a, b, c 表示兵團標號, 用 A, B, C 表示不同軍銜則有下面的布陣方式:

aA	bC	cB
bB	cA	aC
cC	aB	bA



對於兵團、軍銜種類數為4、5的情形, 人們也不容易找出符合上述要求的方陣排列:

aD	bA	cB	dC
cC	dB	aA	bD
dA	cD	bC	aB
bB	aC	dD	cA

aA	cD	dE	eB	bC
dC	bB	eA	cE	aD
eD	aE	cC	bA	dB
bE	eC	aB	dD	cA
cB	dA	bD	aC	eE

如果兵團、軍銜數為6情況又如何? 這便是所謂 "36個軍官問題", 歐拉曾於1779年開始研究它。

為方便計, 歐拉用大、小寫拉丁字母分別表示不同軍銜和兵團, 因而這類排方陣問題又有 "歐拉拉丁方" 稱謂。而所提要求: 每行、每列既有不同軍銜又有不同軍團代表, 數學稱之為 "正交", 如此一來, 問題又可稱為 "正交拉丁方問題", 其中兵團或軍銜數稱為 "階"。

歐拉經過一段時間研究和嘗試後宣稱:

6、10、14、..., 一般地 $2(2k+1)$ 階正交拉丁方不存在 ($k \in \mathbb{N}$)。

1901年塔利 (G. Tarry) 用窮舉法證得 “6階正交拉丁方不存在”, 這樣一來對於歐拉上述猜想人們似乎篤信, 儘管當時尚未有人給出它的證明。

20世紀50年代末, 由於科學技術發展而使得正交設計這門學科興起, 它也給正交拉丁方問題研究注入生機。

是時, 印度數學家玻色 (R. C. Bose) 用射影幾何方法證明了結論:

若 p 是質數 (或它們的冪), 則定存在 p 階正交拉丁方完全組 (即有 $p-1$ 個 p 階拉丁方, 且它們兩兩正交)。

1958年, 美國數學家帕克 (E. T. Parker) 用群論和有限幾何的方法, 構造出21階正交拉丁方。在他的方法啓發下, 玻色和史里克漢德 (Shrikhande) 給出22階 (即 $k=5$ 時 $4k+2$ 型數) 正交拉丁方, 這便否定了歐拉的上述猜測。緊接著他們又構造出10階 ($k=2$ 時 $4k+2$ 型數) 正交拉丁方 (見圖):

10階正交拉丁方

Aa	Eh	Bi	Hg	Cj	Jd	If	De	Gb	Fc
Ig	Bb	Fh	Ci	Ha	Dj	Je	Ef	Ac	Gd
Jf	Ia	Cc	Gh	Di	Hb	Ej	Fg	Bd	Ae
Fj	Jg	Ib	Dd	Ah	Ei	Hc	Ga	Ce	Bf
Hd	Gj	Ja	Ic	Ee	Bh	Fi	Ab	Df	Cg
Gi	He	Aj	Jb	Id	Ff	Ch	Bc	Eg	Da
Dh	Ai	Hf	Bj	Jc	Ie	Gg	Cd	Fa	Eb
Be	Cf	Dg	Ea	Fb	Gc	Ad	Hh	Ii	Jj
Cb	Dc	Ed	Fe	Gf	Ag	Ba	Ij	Jh	Hi
Ec	Fd	Ge	Af	Eg	Ca	Db	Ji	Hj	Ih

同時他們還證明了: 除了 $n=2$、6外, 任何 n 階正交拉丁方都存在。

4. 歐拉關於 $x^4+y^4+z^4=t^4$ 無解猜想

1753年歐拉完成了 $n=3$, 4 時費爾馬猜想 “$x^n+y^n=z^n$ 無非平凡整數解” 的證明, 他同時預感到接下來的 n 值證明將會十分艱難, 於是, 他又從另一角度提出一個猜想:

$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n=x_n^n$ 當 $n \geq 3$ 時, 無非平凡整數解。

顯然, $n=3$ 時上述猜想即爲費爾馬猜想。

兩個世紀過去了, 人們無法斷言歐拉的上述猜是眞是僞。

1911年諾利 (Noeli) 給出 (文獻也稱迪克森 (Dickson) 給出) 等式:

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4,$$

它雖不是上述歐拉猜想的反例, 但這對歐拉猜想來講的確不是 “好” 消息。

果然, 1960年蘭德 (L. J. Lander) 和帕肯 (T. R. Parken) 在電子計算機幫助下找到等式: [12]

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = 144^5,$$

它顯然否定了歐拉的上述猜想。

然而對 $n = 4$ 時猜想成立否, 一段時間人們無法判別。

近二十年後, 1987年美國哈佛大學的埃里克斯 (N. Elkies) 借助橢圓曲線理論, 找到下面算式否定了歐拉猜想中 $n = 4$ 的情形: [12]

$$2682440^4 + 15365639^4 + 1879670^4 = 20605673^4.$$

爾後, 弗耶 (R. Frye) 給出更小的一個例子: [12]

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

至於 $n \geq 6$ 時歐拉猜想是否成立, 人們至今尚不得知。

5. 波利亞 (G. Pólya) 問題

1919年在蘇黎世瑞士聯邦工學院任教的波利亞曾就整數質因子個數問題進行研究, 當時他提出下面問題:

若記 $\tau(n)$ 爲自然數 n 的因子個數 (包括重數), 且規定 $\tau(0) = 0$; $\tau(p) = 1$, 若 p 是質數。$\tau(n)$ 又稱數論函數。

記 O_x 爲不超過 x 的有奇數個因子的正整數個數; E_x 爲不超過 x 的有偶數個因子的正整數個數, 則當 $x \geq 2$ 時, $O_x \geq E_x$。

若記 $L(x) = E_x - O_x$, 上述猜想即 $L(x) \leq 0$。又 $L(x) = \sum_{k=1}^{x} \lambda(k)$, 其中 $x > 1$, $\lambda(k) = (-1)^{\tau(k)}$。

人們驗算了 $x \leq 50$ 的全部情形皆眞。

好景不常, 海塞格洛夫 (C. B. Haselgrove) 1958年證明: 有無窮多個 x, 使 $L(x) > 0$。但他卻未能給出具體例子。

四年後, 拉赫曼 (R. S. Lehman) 發現:

$$L(906180359) = 1,$$

從而成爲否定波利亞猜想的第一個具體反例。

1980年, 塔納卡 (M. Tanaka) 證明: $x = 906180257$ 是使 $L(x) > 0$ 的最小 x。

與之相關的另一個例子是默頓斯 (F. Mortons) 給出的。他把無重因子的自然數稱爲 S 類數, 若這類數中因子個數是奇數個, 則稱它爲 S-奇積數, 因子個數是偶數者稱爲 S-偶積數。

將不大於 n 的 S-奇積數與 S-偶積數之差記爲 $D(n)$, 默頓斯認爲 $D(n) \leq \sqrt{n}$。

$1897 \sim 1913$年間, 馮 · 斯特內克 (L. Von Stenerk) 驗算了 5×10^6 以內的數均有 $D(n) \leq \sqrt{n}$, 且當 $n > 200$ 時還有 $D(n) \leq 0.5\sqrt{n}$。

1979年科恩 (H. Cohen) 等人給出下面的否定上述猜測的算式:

$$D(7725038629) > 0.5 \cdot \sqrt{7725038629}.$$

1984年, 奧德茨科 (A. M. Odrizk) 和特里爾證明: 有無窮多個 n, 使 $D(n) > 1.06\sqrt{n}$, 從而否定了默頓斯猜想。

順便講一句: 倘若黎曼 (G. F. B. Riemann) 猜想成立, 可以推得結論: $\frac{D(n)}{\sqrt{n}}$ 比 $n^{\frac{1}{100}}$ 增長還慢。

關於數論函數 $\tau(n)$ 也順便說兩句, 年輕早逝的印度數學家拉馬奴金 (S. Ramanujan) 早年曾給出其大小的一個估計猜測:

$$\tau(n) \leq 2n^{\alpha}, \quad \text{其中 } \alpha = \frac{11}{2}.$$

拉馬奴金本人給出了 $\alpha = 7$ 的證明。

爾後英國大數學家哈代 (G. H. Hardy, 發現、培養拉馬奴金的 “伯樂”) 證明 $\alpha = 6$。

接著, 哈代的學生蘭金 (R. A. Rankin) 證明了 $\alpha = \frac{29}{5}$ 的情形。

半個世紀後, 1974年比利時數學家德利涅 (P. R. Deligne) 利用代數幾何工具終於證明了 $\alpha = \frac{11}{2}$。順便講一句, 他於同年解決了韋伊猜想 (Weil's Conjecture), 且在1978年榮獲著名的菲爾茲獎 (Field's medal)。

數論函數 $\tau(n)$ 也稱爲算術函數, $\tau(n)$ 是該類函數之一種。

6. 契巴塔廖夫 (Tchebotareff) 問題

前文我們提及了尺規作圖中正多邊形作圖可能性問題, 其實這個問題還與所謂 “分圓多項式” 有聯繫。

滿足 $x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x)$ 的多項式 $\Phi_1,\Phi_2,\ldots$, 其中乘積遍歷 n 的全部正因子, 包括 n 自身。在複數域上有:

$$\Phi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-\xi_k),$$

這裡 ξ_i 系1的 n 次原根 $\xi_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\exp\frac{2k\pi}{n}$, $\Phi_n(x)$ 的次數是 $1,2,\ldots,n$ 中與 n 互質的整數 k 的個數。這類多項式稱爲分圓多項式。

這種多項式可以通過從 x^n-1 中除去所有滿足 $d<n$ 及 $d\mid n$ 的 $\Phi_d(x)$ 的乘積而遞歸地給出。比如係數在素域 $\mathbb{P}$ 中有

$$\Phi_1(x)=x-1,\quad \Phi_2(x)=x+1,\quad \Phi_3(x)=x^2+x+1,\ldots$$

若 n 爲質數 $n=p$, 則有:

$$\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^p+\cdots+1.$$

如果 $\Phi_n(x)=0$ 是根式可解的, 則 n 等分圓周 (作正 n 邊形) 是尺規可完成的。

對於多項式 x^n-1 的分解式, 曾引起了前蘇聯的契巴塔廖夫關注, 當他發現:

$$\begin{aligned}
x-1&=x-1,\\
x^2-1&=(x-1)(x+1),\\
x^3-1&=(x-1)(x^2+x+1),\\
x^4-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1),\\
x^5-1&=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

時便提出猜測: x^n-1 分解爲不可約整係數多項式因式後, 各項係數絕對值均不超過1。

當 $n<105$ 時, 人們未曾發現意外而遇到麻煩, 但伊萬諾夫 (V. Yvanof) 指出, $x^{105}-1$ 有既約因子:

$$\begin{aligned}
&x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}\\
&+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}\\
&+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1,
\end{aligned}$$

這兒 x^7 和 x^{41} 的係數均爲 -2, 此例推翻了契巴塔廖夫猜想。

順便講一句, 這個例子使人聯想起本比巴赫 (L. Bieberbach) 猜想 (1916年提出), 該猜想指:

若 $z \in \mathbb{C}$, 且 $|z| < 1$ (複平面單位圓內), 單葉解析函數 $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ 中, $|a_k| \le k$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$。

此猜想於1984年爲美國數學家勃朗日 (de Brange) 證得。

7. 半正定齊次式表為平方和問題

1855年德國數學家閔可夫斯基 (H. Minkowski) 提出:

實係數半正定齊次式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 能否表成齊次式平方和?

1888年希爾伯特 (D. Hilbert) 討論了該問題, 且得出:

若 m 次 n 元實係數半正定齊次式可表爲齊次式平方和的充要條件是 ① $n \le 2$, m 任意或 ② n 任意, $m = 2$ 或 ③ $n = 3$, $m = 4$ 時。

此外, 他認爲: $n = 3$, $m \ne 4$ 時, 三元半正定式不一定能表爲齊次式平方和, 但他本人無法斷言。(1900年, 希爾伯特將此問題一般情形列爲他著名的數學問題中第17問題, 不過那裡去掉了表爲平方和式的齊次限制, 該問題於1927年爲阿廷 (E. Artin) 解決)。

1967年, 莫茲金 (T. S. Motzkin) 終於找到了這種反例, 例子是: [19]

$$f = z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2,$$

由於 $f \ge 3\sqrt{z^6 \cdot x^4y^2 \cdot x^2y^4} - 3x^2y^2z^2 = 0$, 知 f 是半正定齊次式。

下用反證法證明 f 不能表爲齊次平方和。

若不然, 設 $f = \sum_{i=1}^{l} f_i^2$, 顯然 f_i 不含 x^3, y^3, x^2z, y^2z, xz^2 和 yz^2 項, 且 f_i 只含 xy^2, x^2y, xyz 和 z^3 的線性組合。

這樣, $\sum_{i=1}^{l} f_i^2$ 中 $x^2y^2z^2$ 項係數非負, 而與題設式 f 有 $-3x^2y^2z^2$ 項矛盾! 故 f 不能爲齊次式平方和。

稍後, 肖伊 (M. D. Choi) 於1975年和1977年又分別給出兩個這類反例: [20] [21]

$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^2x^2 - 3x^2y^2z^2$$

和

$$w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw.$$

此外, 一個半正定多項式能表爲有理函數平方和時, 平方和個數問題亦爲人們關注。若記 n 個變元的有理函數個數爲 $p(R(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, 卡塞爾 (Cassels) 等人給出估計:

$$n + 1 \le p(R(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \le 2^n.$$

8. 希爾伯特第16問題

1900年世界數學家大會上希爾伯特發表的著名演說中提出23個數學問題, 其中第16問題涉及到微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} \quad (P_n,\ Q_n \text{ 爲 } x,\ y \text{ 的 } n \text{ 次多項式})$$

的極限環最大個數和位置問題。

下記 $H(n)$ 爲上面方程最大極限環個數。1955年前蘇聯科學院院士著名數學家彼德洛夫斯基 (Bedelovski) 宣稱他們證明了 $H(2)=3$。

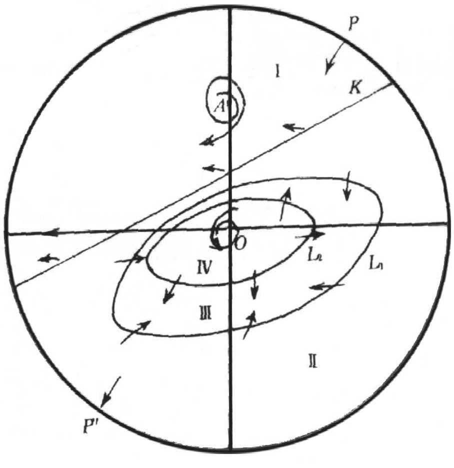
盡管12年後他們發現自己文章中的引理錯誤, 但他們仍聲稱 $H(2)=3$ 成立。

1966年美國數學家庫佩爾 (K. Coppel), 1975年佩科 (Perko) 曾懷疑前面的結論不眞, 但他們卻找不出推翻這個結論的依據。

1979年中國學者史松齡給出一個二次系統至少有四個極限環的例子: [5]

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\lambda x-y-10x^2+(5+\delta)xy+y^2, \\ \frac{dy}{dx}=x+x^2+(-25+8\varepsilon-9\delta)xy, \end{cases}$$

其中 $\lambda=-10^{-250}$, $\varepsilon=-10^{-70}$, $\delta=-10^{-18}$。例子可給出四個環域, 且使每個環域至少存在一個極限環 (見圖)。



稍後, 南京大學的陳蘭蓀和王明淑也給出一個這種反例,[6] 從而推翻了彼德洛夫斯基的結論。

例子舉到這兒, 不過我們還想再次重申: 大師們的失誤絲毫不影響他們的光輝, 與他們在數學上所作的貢獻相較, 這些是微乎其微的, 正如我們前面所說 “瑕不掩瑜” 的道理。

揭示大師們的失誤不僅可令我們嚴謹, 同時也可從其反面悟及眞理。物理學家莫里 (C. Morley) 說: “淺顯的眞理, 反面是虛僞的; 深邃的眞理, 反面還是眞理”。人們在尋找大師們的失誤中, 從反面已獲益匪淺, 由構造反例推翻結論而創造的方法、理論和技巧, 已經或旣將爲數學自身發展作出貢獻。

謝謝大師們! 也謝謝爲大師們尋找失誤的數學家!

参考文獻

1. 吳振奎, 數學中的推廣、反例及不可能問題, 遼寧教育出版社, 1993 (本書將由九章出版社以「數學的創造」爲書名增訂再版)。
2. 吳振奎, 數學中的美, 天津教育出版社, 1997 (九章出版社即將再版)。
3. 梁宗巨, 數學歷史典故, 遼寧教育出版社, 1992。
4. 戴執中、曾廣興, Hilbert 第十七問題, 江西教育出版社, 1990。
5. 史松齡, 二次系統 $(\dot{E}_2)$ 出現至少四個極限環的例子, 中國科學, 1979(11)。
6. 陳蘭蓀、王明淑, 二次系統極限環的相對位置與個數, 數學學報, 1976(7)。
7. 李文林, 數學史教程, 高等教育出版社, 2000。
8. 李文林、袁向東, 希爾伯特問題及其解決簡況, 數學實踐與認識, 1982(1)。
9. 吳振奎, 正交拉丁方猜想, 中等數學, 1997(2)。
10. 吳振奎, 談談質數表達式, 中等數學, 1999(2)。
11. 吳振奎, 費爾馬質數與尺規作圖, 中等數學, 1999(3)。
12. 吳振奎, Euler 的一個猜想及其他, 數學通訊, 1998(8)。
13. 吳振奎, 數學中的巧合、聯繫與統一, (「數學傳播」待發)。
14. 曹富珍, 數論中的問題與結果, 哈爾濱工業大學出版社, 1996。
15. Selfridge, J. L., Factors of Fermat Numbers, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 7(1953), 274.
16. Carl Pomerance., A Tale of Two Sieves, Notices of the American Mathematical Society, Vol.33, No.12, 1996.
17. 勞斯 · 鮑爾、考克斯特 (楊應辰譯), 數學遊戲與欣賞, 上海教育出版社, 2001, 67。
18. 兪曉群, 自然數中的名珠, 天津科學技術出版社, 1990。
19. Motzkin, T. S., The arithmetic-geometric inequality, Inequalities (O. Shishaed), Acad. Press, 1967, 205-224.
20. Choi, M. D., Positive semidefinite biquadratic forms, Lin. Alg. Appl. 12(1975), 95-100.

21. Choi, M. D. and Lam, T. Y., Extremal positive semidefinite forms, Math. Ann. 231(1977), 1-18.
22. 「數學百科全書編譯委員會」, 數學百科全書 (1-5卷), 科學出版社, 1994-2000。
23. 華羅庚, 數學歸納法, 上海教育出版社, 1964。

—本文作者任教於中國天津商學院—