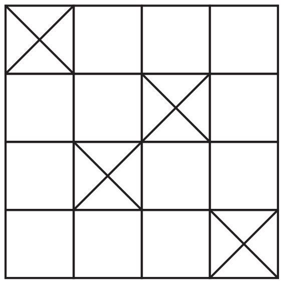
騎士漫遊方陣與魔方陣

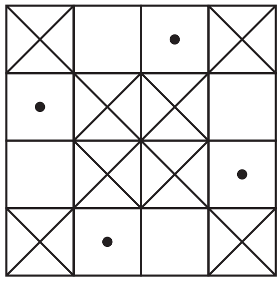
林克瀛

魔方陣是兩千多年前發現的數字方陣。一個 n 階魔方陣的定義是把由1開始的連續整數排列成一個方陣, 陣中每一橫排每一縱列及兩條對角線上 n 個數字之和均相同。把一個魔方陣旋轉或取鏡中映象共可得8個不同的方陣, 稱爲彼此等價, 只算是同一種排法。三階魔方陣只有一種排法, 古代稱爲洛書, 即洛水書簡之意。法國有人在1693年出版的著作中指出四階魔方陣共有880種。三十多年前美國有人用電腦算出五階魔方陣共有275,305,224種。魔方陣可以推廣到立體或四維甚至更高維數的空間。在1972年一位加拿大氣象專家用簡單的算術證明三階魔術立方體共有4種。1981筆者利用4個互相正交的拉丁超立方體證明在4維空間的三階魔術超立方體共有58種, 詳細證明於1986發表在離散數學期刊 (Discrete Mathematics)。

騎士漫遊方陣是西方人發現的數字方陣。最早研究的人是瑞士數學天才歐拉, 他在1759年發表他的結果。這種方陣是把西洋棋的騎士棋子放在棋盤的一個格子當中, 然後依下棋的走法走遍整個棋盤, 但不能重複走過同一格。騎士的走法和象棋中的馬相同, 棋盤共有六十四格。把棋子的起始位置放1, 下一步放2, 最後一步放64, 就得到一個數字方陣。三階騎士漫遊方陣是不存在的, 因爲棋盤太小, 騎士放在正中央的格子上, 再走一步就要跨出棋盤了。四階騎士漫遊方陣也是不存在的, 理由如下: 如果騎士在漫遊途中經過棋盤上兩個斜對角上的格子, 則必如圖一所示, 只能在4個打叉號的格子之間來回, 除非起點及終點落在棋盤上同一邊的兩個角落上。於是1、2、3、4及13、14、15、16等8個數字就必定落在如圖二所示打上叉號的方格中。於是5、6、7、8四個數字勢必落在圖中四個空白格子中, 或四個有黑點的方格中, 9就無法放入剩下未使用過的格子裡。



圖一



圖二

一個有趣的問題是: 一個魔方陣會不會同時也是騎士漫遊方陣? 筆者不知道答案, 但曾證明下面定理:

定理: 一個同時具有魔方陣及騎士漫遊方陣兩種性質的方陣, 其階數必須是4的倍數。

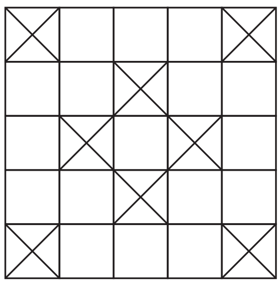
證明: 設棋盤的階數爲 n, 欲證明 $n = 4k$, 只要分別排除 $n = 4k + 2$ 或 $n = 4k + 1$、$4k + 3$ (均可表爲 $2k + 1$) 等三種狀況即可。先把棋盤中相鄰的兩個方格分別塗上黑白二色。若騎士已走到黑 (白) 格中, 則下一步必定移到 白 (黑) 格子。因此全部奇 (偶) 數都落在同一種顏色的格子當中。先考慮階數爲 $n = 4k + 2$ 的情形。沿對角線上的格子顏色相同, 因此所有數字之和必爲偶數 (因爲偶數個奇數之和必爲偶數), 而一排 n 個數字之和必爲奇數 (因 $2k + 1$ 爲奇數, 而 $2k + 1$ 個奇數之和爲奇數), 因此不可能是魔方陣。再考慮 $n = 2k + 1$。若其中有一排有 k 個白格子及 $k + 1$ 個黑格子, 則相鄰的一排必有 k 個黑格子及 $k + 1$ 個白色格子。於是相鄰兩排 n 個數字之和必定是一爲奇數一爲偶數, 因爲

$$\text{奇數個奇數} + \text{偶數個偶數} = \text{奇數}$$
$$\text{奇數個偶數} + \text{偶數個奇數} = \text{偶數。}$$

在民國75年6月出版的數學傳播, 林建宏先生發表一篇文章, 證明五階棋盤上騎士漫遊共有112個解。他用電腦得到這個結果。下面我提供一個不必使用電腦的證明。六階棋盤上的漫遊總數太大, 必須用電腦計算, 我已經得到結果, 詳情將另寫一篇文章說明。

在一個五階棋盤中, 若騎士的起點及終點都不在角落上, 則騎士必須在途中經過四個角落, 由圖三可看出騎士的唯一可能性是漫遊在有叉號的方格中來回走動, 不可能經過全部格子, 因此起點及終點至少有一個必須落在角落上。在計算有多少種漫遊時, 旋轉及反映以及時間反轉 (倒過來走) 都是等價的, 所以可假定每一種漫遊的起點都落在左上角。

我們可以把全部漫遊分爲三大類, 第一大類的終點不在角落上, 由圖四可看出由1到8的落點已唯一確定。第二大類漫遊的終點落在和起點同一邊的角上, 如圖五所示, 前六個數及最後兩個數 (24、25) 均已有確定位置。第三大類漫遊之起點及終點落在相對的角落上如圖六所示, 漫遊的前面及後面之4個落點均已確定。



圖三

1				3
		2		
	8		4	
		6		
7				5

圖四

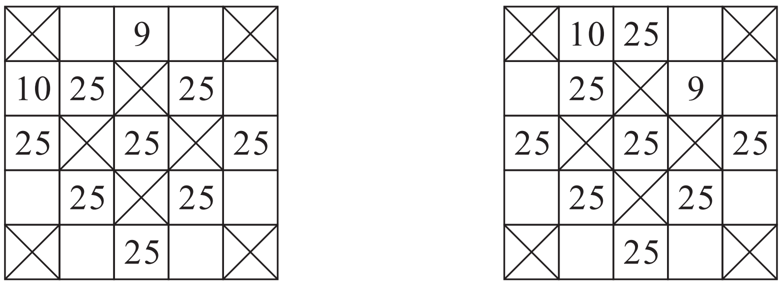
先看圖四, 第8及第9步的走法有八種, 也就是說有八種方法把數字9及10塡入圖四, 如圖七所示。在圖七的兩個棋盤中, 各有4種方法把由1至8這8個數放入打上叉號的方格中, 又有8種方法把25 (代表終點) 放入棋盤中。我們可以很容易檢查只有唯一的一種方法把其他數字(由11到24) 依騎士漫遊的規則塡入。因此第一類漫遊共有 $8 \times 8 = 64$ 種。

1				3
		2		
	24		4	
		6		
25				5

圖五

1				3
		2		
	22		4	
		24		
23				25

圖六



圖七

在圖五中, 共有30種方法把7, 8, 23塡入, 如圖八所示。其他數字 (由9至22) 的位置已完全確定, 因此共有30種第二類漫遊。

在圖六中, 把5, 6, 21塡入的各種方法如圖九所示。我們很容易證明, 把其他數 (由7到20) 塡入空格中只有一種方法。在圖九中, 把1, 2, 3, 4及22, 23, 24, 25 等8個數塡入打上叉號的格子時, 對 A, B 兩塊棋盤而言, 各有4種方法, 對 C, D, E 則各有2種方法。以上合計似乎表示第三類漫遊一共有28種。但是有些漫遊是等價的。圖九 A 對穿過中心的垂直線而言左右對稱, 因此不等價的漫遊數不是8而是4。圖九 B 對穿過5及21的對角線而言是對稱的, 因此不等價的漫遊數不是8而是4。圖九 C 的對稱性比較複雜, 將此圖左右互換, 同時把每一數 R 換上互補數 $(26-R)$ 後圖形不變。因此不等價的漫遊數不是4而是2, 圖 D 及 E 則沒有對稱性, 各有4種漫遊, 一共合計共有18種第三類漫遊。三大類合計爲 $64+30+18=112$, 和林建宏先生由電腦計算結果相同。這三類漫遊各舉一例如圖十所示。

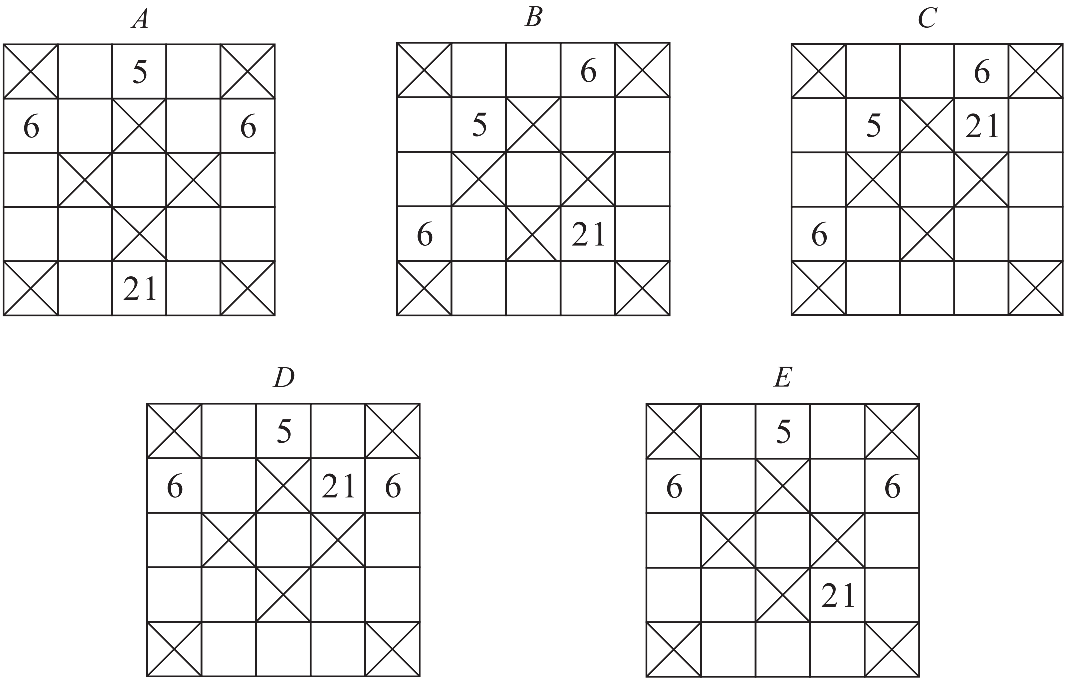
1	8	23		3
		2	23	
7	24		4	
		6	23	
25	8	23		5

1		23	8	3
	7	2	23	
	24		4	
8		6	23	
25		23		5

1	8	23		3
		2	7	
	24		4	
		6	23	8
25		23		5

1		23	8	3
		2	23	
	24		4	7
		6	23	
25		23	8	5

圖八



圖九

歐拉曾研究過在西洋棋的棋盤上, 返回起點的騎士循環漫遊。騎士走64步後回到起點, 中途經過全部格子。對階數 n 爲奇數的棋盤, 這種循環漫遊不可能出現, 證明如下: 把棋盤四角

的格子以及錯開來的格子塗上黑色, 全部黑格子的數目比白色格子的數目多出一個。奇數必須填入黑格中, 因為由1到 n^2 的整數當中, 奇數的數目正好比偶數的數目多1個。因此數字1 (漫遊起點) 及 n^2 (漫遊終點) 都必須放在黑格中, 而每走一步, 格子要換顏色, 所以不可能由終點再走一步回到起點。

1	20	9	14	3
10	25	2	21	16
19	8	15	4	13
24	11	6	17	22
7	18	23	12	5

1	8	23	14	3
18	13	2	9	22
7	24	19	4	15
12	17	6	21	10
25	20	11	16	5

1	18	5	10	3
6	11	2	19	14
17	22	13	4	9
12	7	24	15	20
23	16	21	8	25

圖十

參考文獻

1. 林克瀛, 魔方陣, 數學傳播, 4卷3期, p.20 (1980)。
2. 林克瀛, 拉丁方陣和尤拉的預言, 科學月刊, 3卷9期, p.33 (1972)。
3. 林克瀛, 漫談魔方陣, 科學月刊, 3卷10期, p.48 (1972)。
4. 林建宏, 5階棋盤之騎士漫遊僅有112個解, 數學傳播, 10卷2期, p.20 (1986)。
5. 林克瀛, 縱橫圖與騎士漫遊方陣, 中華易學, 6卷9期, p.298 (1985)。
6. K. Y. Lin, Magic cubes and hypercubes of order 3, *Diserete Math.* 58, 159 (1986).

—本文作者任教於清華大學物理系—