Klein 問題及其變異*

馮躍峰

1932年, 匈牙利的一位女大學生克萊因 (E. Klein) 提出了這樣一個問題 (見文 [1]):

問題1: 給定自然數 k, 求最小的自然數 $H(k)$, 使平面上任 $H(k)$ 個點 (其中無三點共線), 都有 k 個點構成一個凸 k 邊形的頂點。

顯然, $H(3)=3$。克萊因本人證明了 $H(4)=5$。

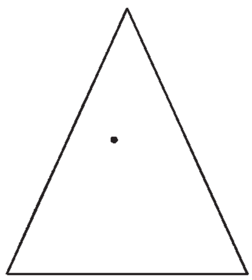

圖1

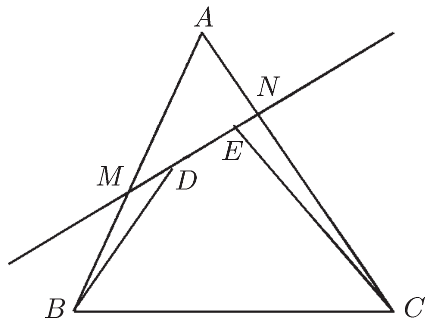

圖2

實際上, 易知 $H(4)>4$ (見圖1)。因此, 要證明 $H(4)=5$, 只須證明任意5點 (其中無3點共線) 中必有4點構成某個凸4邊形的頂點。對此, 我們需要如下一些基本概念和結論。

1. 凸集, 凸圖形

設 G 是一個平面點集, 若對 G 中任意兩點 A, B, 線段 AB 上的點都在 G 中, 則稱集合 G 爲凸集, 凸集的邊界稱爲凸圖形。

2. 凸包

設 A 是一個平面點集, 則覆蓋集合 A 的最小凸圖形稱爲 A 的凸包。

3. 兩個基本定理

*編註: 參見 110 期 p.28-42「幸福結局問題–鴿籠原理與拉姆西定理」。

定理1: 兩個凸集的交集仍爲凸集。

定理2: 凸集邊界 (凸圖形) 上的點依次用線段連接得到的多邊形是凸多邊形。

下面我們來重覆一下克萊因的工作。

考慮5個點的凸包, 因爲無3點共線, 所以凸包只可能是三角形、四邊形、五邊形。

(1) 若凸包爲五邊形或四邊形, 則結論顯然成立;

(2) 若凸包爲三角形, 設爲 $\triangle ABC$, 點 D, E 在 $\triangle ABC$ 的內部 (見圖2)。作直線 DE, 因爲無三點共線, 三點 A, B, C 都不在直線 DE 上, 不妨設直線 DE 與 AB、AC 交於 M, N, 則由定理2, $MBCN$ 是凸四邊形, 進而 $DBCE$ 是凸四邊形, 命題獲證。

但對 $k > 4$, 克萊因無法解決自己提出的問題, 便去請教她的同學澤克勒斯 (G. Szekeres)。1935年, 澤克勒斯和厄爾多斯 (Erdös) 首次公開了這一問題, 並引述了克萊因關於 $H(4) = 5$ 的證明。

$H(5) =?$ 此問題已被著名數學家杜朗 (Turan) 和馬凱 (Makai) 共同解決。他們證明了: $H(5) = 9$。但這一結論的初等證明因其分類相當繁瑣而過於冗長 (要用幾頁紙才能寫下), 尋找一個簡單而初等的證明是一件有意義的工作。

那麼 $H(6)$ 又是多少? 這卻是一個世界難題, 至今沒有徹底解決。但人們已經知道 $H(6) \geq 17$。

由於上面討論所用的方法不具一般性, 從而無法推廣。正因爲 $H(k)$ 的精確值難於求出, 人們便轉向尋求 $H(k)$ 的範圍。

1935年, 厄爾多斯和澤克勒斯利用圖論中的拉姆賽 (F. P. Ramsey) 理論, 給出了 $H(k)$ 的第一個估計: $H(k) \leq R(k, 5; 4)$。

這裡 $R(k, 5; 4)$ 的意義是指滿足下列條件的最小自然數 R (稱爲拉姆賽數): 對於有至少 R 個元素的集合, 將它的所有4元子集分爲兩類, 則存在 k 個元素, 這 k 個元素構成的集合的所有4元子集都在第一個類內; 或者存在5個元素, 這5個元素構成的集合所有4元子集都在第二個類內。

我們知道, 拉姆賽數的確定是圖論中的著名難題, 因而上述估計只能說明 $H(k)$ 的存在性, 別無其他意義。1960年, 他們又給出了 $H(k)$ 的一個更好的估計:

$$2^{k-1} + 1 \leq H(k) \leq C_{2k-4}^{k-2}, \quad \text{並猜想: } H(k) = 2^{k-1} + 1.$$

若此猜想成立, 則 $H(6) = 17$。人們希望看到關於 $H(6) = 17$ 的嚴格證明。

上述一些結果引起了組合數學界的廣泛注意, 著名數學家 Rota 推崇它是二十世紀組合數學的經典性結論, 並收入其主編的名著 [2] 中。

下面我們研究 Klein 問題的一種變異。爲此, 我們先給出如下的

定義: 如果平面上的 n 個點都在其凸包的邊界上, 則稱它是一個凸 n 點組。特別地, 平面上無3點共線的凸 n 點組是一個凸 n 邊形的頂點。

前述 Klein 問題討論的是平面上存在凸 k 點組的點集 (其中無3點共線) 的最小容量 (點的個數)。如果我們將這一問題的題設與題斷逆轉過來, 即先給定平面上點集的容量 (假定爲 n 個點), 反過來討論其中至少有多少個凸 k 點組, 則得到 Klein 問題的一種變異:

問題2: 給定自然數 n, $k \geq 4$, 對平面上的任意 n 個點, 其中任何3點不共線, 求其中的凸 k 點組的個數的最小值 $f(n,k)$。

這一問題可以看作是 Klein 問題的推廣。實際上, 解不等式 $f(n,k) \geq 1$, 即可得到存在凸 k 點組的 n 的最小值。因此, 它是一個容量和難度都比 Klein 問題更大的問題。下面介詔這一問題在 $k=4$ 時的一些初步結果。爲敍述問題方便, 我們將 $f(n,4)$ 簡記爲 $f(n)$。

顯然, 由前面的圖1可知, $f(4)=0$。進而, 我們有下面的

命題1: $f(5)=1$。

證明: 由 $H(4)=5$, 有 $f(5) \geq 1$。又如圖3, 令 $P=\{A,B,C\}$, $Q=\{D,E\}$, 則四邊形必含有 Q 中的兩個點, 否則, 四點組必是三角形及其內部一個點, 不構成凸4點組。另外, D、E 只能與 B、C 構成凸4點組, 這是因爲 E 在三角形 ADC 內, D 在三角形 ABE 內, 所以圖3中恰有一個凸四邊形。故 $f(5)=1$。

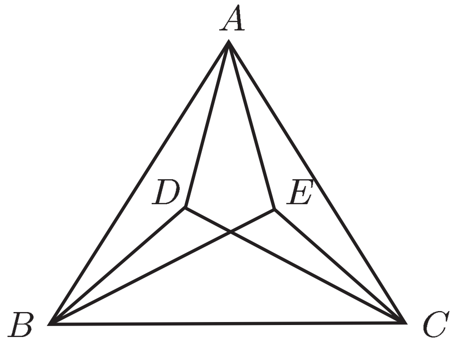

圖3

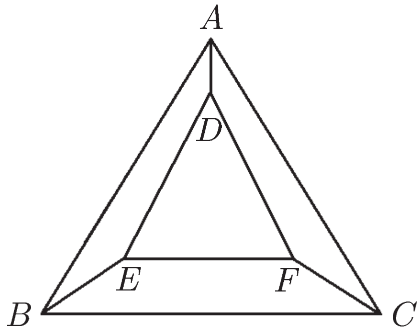

圖4

命題2: $f(6)=3$。

爲了證明這一結論, 我們需要下面的

引理1: 當 $n \geq 5$ 時, $f(n) \geq \frac{C_3^n}{n-4} \triangleq t(n)$。

證: 當 $n=5$ 時, 由 $H(4)=5$, 知結論成立。

當 $n>5$ 時, 每5個點都有一個凸4點組, 共得到 C_n^5 個凸4點組。但其中有重覆計數: 每個凸4點組對應 $n-4$ 個不同的5點組, 被計數 $n-4$ 次, 這樣, 凸4點組的個數 $f(n)\geq t(n)$。

綜上所述, 引理1獲證。下面證明命題2。

首先, 由引理1, $f(6)\geq t(6)=6/2=3$; 其次, 如圖4, 令 $P=\{A,B,C\}$, $Q=\{D,E,F\}$, 則凸4點組必恰含有 Q 中的兩個點。實際上, 當恰含有 Q 中一個點時, 此點在三角形 ABC 內, 不與 A, B, C 構成凸4點組; 當含有 Q 中三個點時, 則只能含有 P 中的一個點, 設爲 A, 但 D 在三角形 AEF 內, 不構成凸4點組。另外, DE 只與 AB 構成凸4點組, EF 只與 BC 構成凸4點組, FD 只與 CA 構成凸4點組, 所以恰有3個凸4點組, 故 $f(6)=3$。

命題3: $f(7)=9$。

證: 考察7點的凸包, 設其連續3個頂點爲 A_1, A_2, A_3, 令 $P=\{A_1,A_2,A_3\}$, 其餘4個點的集合記作 Q, 則 Q 中的點都在角形域: $\angle A_1A_2A_3$ 內。

我們先證明: 恰含有 P 中兩個點的凸4點組至少有 $C_4^2=6$ 個。實際上, 在 Q 中任取兩個點 A, B, 作直線 AB, 則點 A_1, A_2, A_3 中必有兩個點, 設爲 A_2、A_3, 在直線 AB 的同一側。因爲直線 AB 與點集的凸包圍成一個凸多邊形, 而 A, B 與 A_2、A_3 都在此凸多邊形的邊界上, 所以它們構成凸4點組 (見圖5)。注意到 Q 中的 A、B 點對有 $C_4^2=6$ 個, 由此得到6個恰含 P 中兩個點的凸4點組。

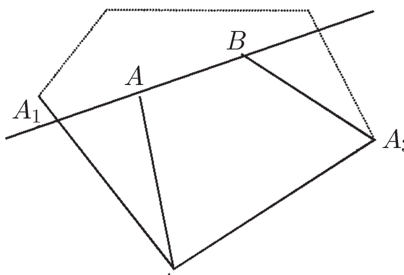

圖5

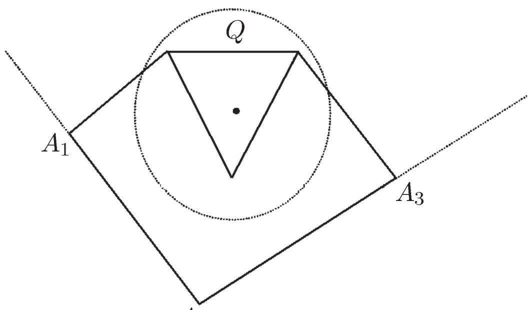

圖6

再考察點集 Q 的凸包 Ω, 此時 P 中的點都在凸包 Ω 外。

(1) 若 Ω 爲三角形 (見圖6), 則 $\{A_1\}\cup Q$ 中至少有 $f(5)=1$ 個凸4點組, 因爲 Q 不是凸4點組, 所以此4點組必含點 A_1。同樣考慮 $\{A_2\}\cup Q$, $\{A_3\}\cup Q$, 又可得到2個類似的凸4點組。於是, 恰含 P 中1個點的凸4點組有3個, 所以 $f(7)\geq 6+3=9$。

(2) 若 Ω 爲凸4邊形, 設爲 $B_1B_2\cdots B_4$。考察點集 Q 中在 $\triangle A_1A_2A_3$ 內的點的個數 k。

(i) 若 $k\le 2$, 則 $\triangle A_1A_2A_3$ 外至少有 Q 中2個點, 設爲 B_1, B_2 (見圖7)。因爲 B_1, B_2 都在角形域 $\angle A_1A_2A_3$ 內且在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外, 所以它們分別與 A_1, A_2, A_3 構成凸4點組, 得到2個恰含 P 中3個點的凸4點組, 所以 $f(7)\ge 6+1+2=9$。

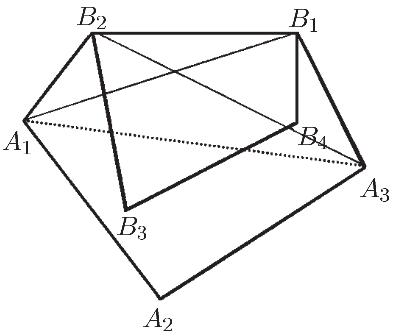

圖7

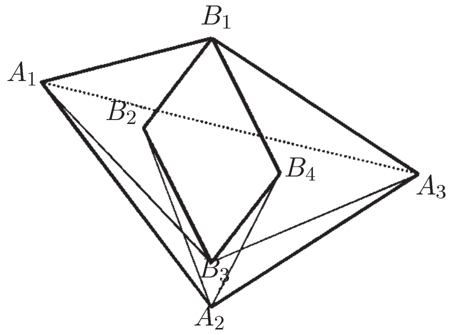

圖8

(ii) 若 $k\ge 3$, 再考察四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 的形狀。

如果四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 是平行四邊形 (見圖8), 則4個角形域: $\angle B_iB_{i+1}B_{i+2}$ $(i=1,2,3,4)$ 覆蓋了全平面。對每個點 A_i $(1\le i\le 3)$, 必有其中一個角形域覆蓋了點 A_i, 此角形域邊界上的3個點與 A_i 構成凸4點組 (因爲 A_i 在四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 外)。由此得到3個恰含 P 中1個點的凸4點組, 所以 $f(7)\ge 6+1+3=10$。

如果四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 是梯形, 不妨設 $B_1B_2//B_3B_4$, 而 B_4B_1, B_3B_2 的延長線交於 X。此時, 四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 的4條邊及2條對角線所在直線將平面劃分爲若干個區域, 記其中以線段 B_4X, B_3X 的延長線爲邊界的一個角形域爲 X。那麼, 12個角形域: $\angle B_iB_jB_k$ (i, j, k 是 1, 2, 3, 4 中任何3個互異的數) 覆蓋了平面上除角形域 X 外的所有點, 且每個點至少被覆蓋2次, 比如被角形域: $\angle B_1B_4B_2$ 覆蓋的區域, 也被角形域: $\angle B_1B_4B_3$ 覆蓋 (見圖9, 圖中的數字表示所在區域被覆蓋的次數)。注意到 $\triangle A_1A_2A_3$ 至少包含四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 的3個頂點, 從而 A_1, A_2, A_3 中至少有一個點 A_i $(1\le i\le 3)$ 不在角形域 X 內, 它至少被2個角形域 $\angle B_iB_jB_k$ 覆蓋, 此2個角形域邊界上的3個點分別與 A_i 構成凸4點組 (因爲 A_i 在四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 外), 於是, 得到2個恰含 P 中1個點的凸4點組, 所以 $f(7)\ge 6+1+2=9$。

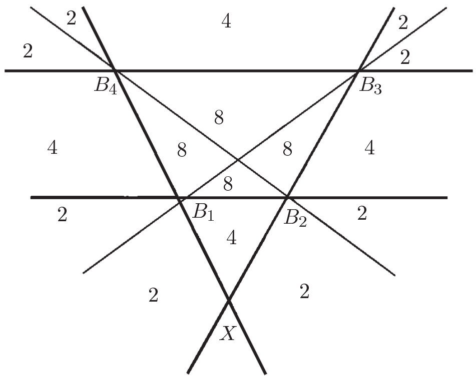

圖9

如果四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 是兩組對邊都不平行的四邊形, 不妨設 B_2B_1, B_3B_4 的延長線交於點 X, B_1B_4, B_2B_3 的延長線交於點 Y。此時, 四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 的4條邊及2條對角線所在的直線將平面劃分爲若干個區域, 其中以線段 B_2X, B_3X 的延長線爲邊界的一個角形域記爲 X, 以線段 B_1Y, B_2Y 的延長線爲邊界的一個角形域記爲 Y。那麼, 12個角形域: $\angle B_iB_jB_k$ (i, j, k 是 1, 2, 3, 4 中任何3個互異的數) 覆蓋了平面上除角形域 X, Y 外的所有點, 且每個點至少被覆蓋2次, (見圖10, 圖中的數字表示所在區域被覆蓋的次數)。注意到 $\triangle A_1A_2A_3$ 至少包含四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 的3個點, 從而 A_1, A_2, A_3 中至少有一個點 A_i $(1\le i\le 3)$ 不在角形域 X, Y 內, 它至少被2個角形域 $\angle B_iB_jB_k$ 覆蓋, 此2個角形域邊界上的3個點分別與 A_i 構成凸4點組 (因爲 A_i 在四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 外), 於是, 得到2個恰含 P 中1個點的凸4點組, 所以 $f(7)\ge 6+1+2=9$。

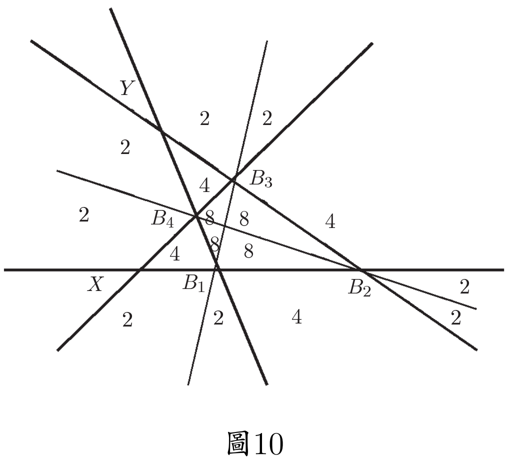

圖10

綜上所述, $f(7) \geq 9$。

另一方面, 作正三角形 ADE, 在三角形 ADE 內作線段 $GF//DE$, 且使 $AG = AF$。再在三角形 ADE 外作線段 $BC//DE$, 且使 B 在 $\angle GDF$ 的對頂角內, 使 C 在 $\angle GEF$ 的對頂角內, 得到圖11。則此圖中恰有9個凸4點組。

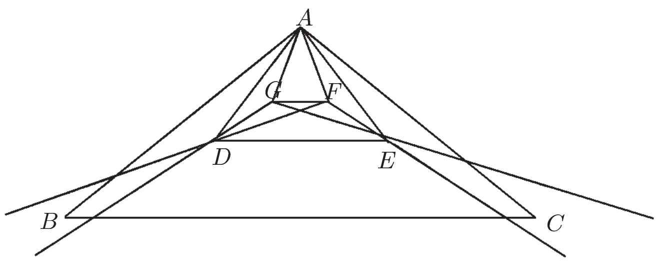

圖11

實際上, 令 $P = \{A, B, C\}$, $Q = \{D, E, F, G\}$。考察每一個凸4點組, 假設凸4點組中恰含 P 中的 k 個點。

(1) 若 $k = 0$, 則這樣的凸4點組恰有1個, 即四邊形 $DEFG$。

(2) 若 $k = 1$, 則這樣的凸4點組恰有2個, 因爲 A 不與 Q 中任何三角形構成凸4點組, 而 B 僅與 E, F, G 構成凸4點組, C 僅與 F, G, D 構成凸4點組。

(3) 若 $k = 2$, 則4點組必含有 Q 中的兩個點。當所含 P 中的兩個點爲 A, B 時, 則它們只與 Q 中的 D, G 構成凸4點組; 當所含 P 中的兩個點爲 A, C 時, 則它們只與 Q 中的 E, F 構成凸4點組; 當所含 P 中的兩個點爲 B, C 時, 則它們可與 Q 中的 G, F; D, E; G, E; F, D 這4個點對構成凸4點組, 此時共有 $1 + 1 + 4 = 6$ 個凸4點組。

(4) 若 $k = 3$, 則這樣的凸4點組不存在。是因4點組中含有 Q 中的一個點, 此點在三角形 ABC 內, 不構成凸4點組。

綜上所述, 圖中恰有 $1 + 2 + 6 = 9$ 個凸4點組, 故 $f(7) = 9$。

命題4: $f(8) = 17$。

爲了證明此結論, 我們需要下面的

引理2: 當 $n \geq 8$ 時, $f(n) \geq C_{n-3}^2 + f(n-2) + 4$。

證: 考察 n 個點的凸包, 設它的連續3個頂點爲 A_1, A_2, A_3, 令 $P = \{A_1, A_2, A_3\}$, 其餘 $n - 3$ 個點的集合記作 Q。注意到 $n \geq 8$, 所以 $|Q| \geq 5$。同命題3所證, Q 中任何兩個點都與 P 中某兩個點構成凸4點組, 由此得到 C_{n-3}^2 個恰含有 P 中兩個點的凸4點組。

再考察 Q 的凸包 Ω, P 中的點都在凸包 Ω 外。

(1) 若 Ω 爲凸5邊形, 設爲 $B_1B_2\cdots B_5$。此時考察 $\{A_1\}\cup Q$ 中的 $n-2$ 個點, 至少有 $f(n-2)$ 個凸4點組。此外, 5個角形域: $\angle B_iB_{i+1}B_{i+2}$ $(i=1,2,\ldots,5)$ 覆蓋了全平面, 從而必有一個角形域覆蓋了點 A_2, 設此角形域爲 $\angle B_jB_{j+1}B_{j+2}$, 則四點 B_j, B_{j+1}, B_{j+2}, A_2 構成凸4點組; 再將角形域 $\angle B_jB_{j+1}B_{j+2}$ 劃分爲3個角形域: $\angle B_jB_{j+1}B_{j-1}$, $\angle B_{j-1}B_{j+1}B_{j+3}$, $\angle B_{j+3}B_{j+1}B_{j+2}$, 其中必有一個角形域覆蓋了點 A_2, 此角形域邊界上的3個點與 A_2 構成凸4點組 (見圖12)。於是恰含 P 中一個點 A_2 的凸4點組有2個。同理, 恰含 P 中一個點 A_3 的凸4點組有2個, 所以 $f(n)\geq C_{n-3}^2+f(n-2)+4$。

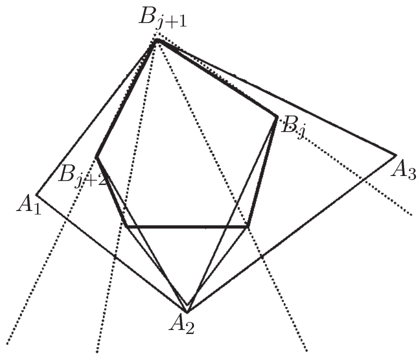

圖12

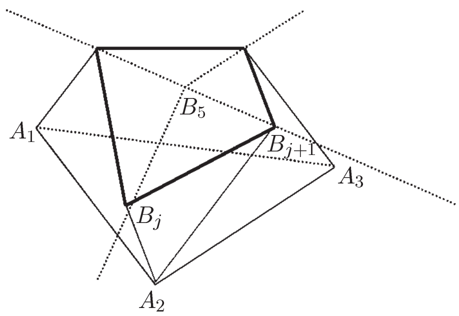

圖13

(2) 若 Ω 爲凸4邊形 $B_1B_2\cdots B_4$, 則四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 內有 Q 中的一個點 B_5。

(i) 如果四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 至少2個頂點在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外, 則每個點與 A_1, A_2, A_3 構成凸4點組, 得到至少2個恰含 P 中三個點的凸4點組。此外, 作射線 B_5B_i $(i=1,2,3,4)$, 則4個角形域: $\angle B_iB_5B_{i+1}$ $(i=1,2,3,4)$ 覆蓋了全平面, 從而必有一個角形域覆蓋了點 A_2, 設此角形域爲版 $\angle B_jB_5B_{j+1}$, 則四邊 B_j, B_5, B_{j+1}, A_2 構成凸4點組。於是恰含 P 中一個點 A_2 的凸4點組有1個 (見圖13)。同理, 恰含 P 中一個點 A_3 的凸4點組有1個。最後, 考察 $\{A_1\}\cup Q$ 中的 $n-2$ 個點, 至少有 $f(n-2)$ 個凸4點組, 所以 $f(n)\geq C_{n-3}^2+f(n-2)+4$。

(ii) 如果四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 至多有1個頂點在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外, 則類似於命題3的討論, 12個角形域: $\angle B_iB_jB_k$ (i, j, k 是 1, 2, 3, 4 中任何3個互異的數) 覆蓋了平面上最多除去2個角形域 X, Y 外的所有點, 且每個點至少被覆蓋2次 (見圖10)。注意到 $\triangle A_1A_2A_3$ 至少包含四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 的1個頂點, 從而 A_1, A_2, A_3 中至少有一個點, 設爲 A_2, 不在角形域 X,Y 內, 它至少被2個角形域 $\angle B_iB_jB_k$ 覆蓋, 此2個角形域邊界上的3個點分別與 A_2 構成凸4點組 (因爲 A_2 在四邊形 $B_1B_2\cdots B_4$ 外), 於是得到2個恰含 P 中一個點 A_2 且不含 Q 中點 B_5 的凸4點組。此外, 作射線 B_5B_i $(i=1,2,3,4)$, 則4個角形域: $\angle B_iB_5B_{i+1}$

$(i=1,2,3,4)$ 覆蓋了全平面, 從而必有一個角形域覆蓋了點 A_2。設此角形域爲 $\angle B_jB_5B_{j+1}$, 則四點 B_j, B_5, B_{j+1}, A_2 構成凸四邊形。於是恰含 P 中一個點 A_2 且含點 B_5 的凸4點組有1個。同理, 恰含 P 中一個點 A_3 且含點 B_5 的凸4點組有1個。最後, 考察 $\{A_1\}\cup Q$ 的 $n-2$ 個點, 至少有 $f(n-2)$ 個凸4點組, 所以 $f(n)\ge C_{n-3}^2+f(n-2)+4$。

(3) 若 Ω 爲凸三角形, 設爲 $B_1B_2B_3$, 它的內部有 Q 中的2個點 B_4, B_5。此時考察 $\{A_1\}\cup Q$ 中的 $n-2$ 個點, 至少有 $f(n-2)$ 個凸4點組。此外, 作射線 B_4B_i $(i=1,2,3)$, 則3個角形域: $\angle B_iB_4B_{i+1}$ $(i=1,2,3)$ 覆蓋了全平面, 從而必有一個角形域覆蓋了點 A_k $(k=2,3)$。設此角形域爲 $\angle B_jB_4B_{j+1}$, 則四點 B_j, B_4, B_{j+1}, A_k 構成凸4點組。注意到 $k=2,3$, 由此得到2個恰含 P 中1個點 A_2 (或 A_3) 且含 Q 中點 B_4 但不含 B_5 的凸4點組。同樣 $\triangle B_1B_2B_3$ 的內部還有 Q 中一個點 B_5。類似可得到2個恰含 P 中1個點 A_2 (或 A_3) 且含 Q 中 B_5 但不含 B_4 的凸4點組, 所以 $f(n)\ge C_{n-3}^2+f(n-2)+4$。

綜上所述, 引理2獲證。

下面證明命題4。

首先, 由引理2, $f(8)\ge C_5^2+f(6)+4=10+3+4=17$。

其次, 作兩個正三角形 ABC 及 DEF, 使它們的中心重合, 邊互相平行。再作線段 $MN//BC$, 使 M 在 $\angle EBF$ 的對頂角內, 使 N 在 $\angle ECF$ 的對頂角內, 得到下圖 (圖14)。

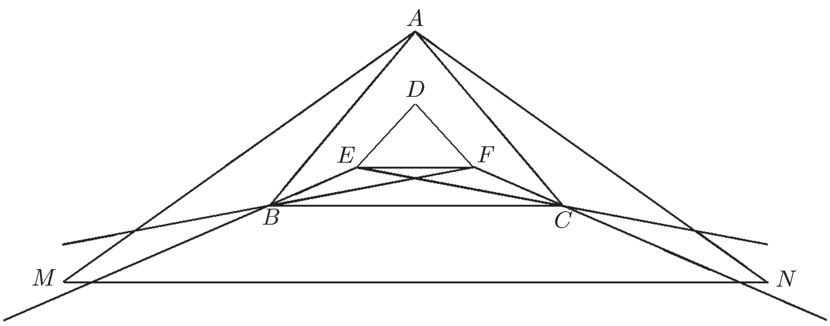

圖14

下面證明圖14中恰有17個凸4點組。爲此, 令 $P=\{D,E,F\}$, $Q=\{A,B,C,M,N\}$。

(1) 若凸4點組不含 P 中的點, 則凸4點組有 $f(5)=1$ 個;

(2) 若凸4點組恰含 P 中的一個點, 考察 Q 中的 $C_5^3=10$ 的三角形, 稱這些三角形中3頂點與 P 中一個點構成凸4點組的三角形爲好的, 否則爲不好的。那麼, $\triangle ABC$ 是不好的, 而 $\triangle ABM$ 是好的, 其頂點可分別與 D, E 構成凸4點組, 得到2個凸4點組。同樣, $\triangle ACN$ 是好的, 可得到2個凸四邊形。$\triangle ABN$, $\triangle ACM$ 是不好的, $\triangle AMN$ 是不好的。$\triangle BCM$

是好的, 其頂點與 F 構成一個凸4點組。$\triangle BCN$ 是好的, 其頂點與 E 構成一個凸4點組。$\triangle BMN$ 是好的, 其頂點與 F 構成一個凸4點組。$\triangle CMN$ 是好的, 其頂點與 E 構成一個凸4點組。這樣一共得到8個凸4點組。

(3) 若凸4點組恰含 P 中的2個點, 當含 D, E 時, 直線 DE 將 Q 中的點劃分爲兩部分, 四點組中的另兩個點必在同一部分中。C, F, N 中任可兩個點所在的直線都與線段 DE 相交, 不構成凸4點組; 而 A, B, M 中任何兩個點都可以與 D, E 構成凸4點組, 得到3個凸4點組。同樣, 當含 D, F 時也可得到3個凸4點組。當含 E, F 時, 直線 EF 的一側有 Q 中的4個點, 它們構成6個2點組, 只有 B, C; M, N 能與 E, F 構成凸4點組, 得2個凸4點組。所以一共得到8個凸4點組。

(4) 若四點組恰含 P 中的3個點, 則這樣的凸4點組不存在。

綜上所述, 圖7中凸4點組的個數爲 $1+8+8=17$。命題4獲證。

反覆利用引理2, 我們可得到 $n \geq 8$ 時 $f(n)$ 的一種估計:

$$\begin{aligned}
f(2k) &\geq C_{2k-3}^2 + f(2k-2) + 2 \geq C_{2k-3}^2 + C_{2k-5}^2 + f(2k-4) + 2\times 2\\
&\geq C_{2k-3}^2 + C_{2k-5}^2 + C_{2k-7}^2 + f(2k-6) + 2\times 3\\
&\geq C_{2k-3}^2 + C_{2k-5}^2 + \cdots + C_5^2 + f(6) + 2\times(3k-3).\\
f(2k-1) &\geq C_{2k-4}^2 + f(2k-3) + 2 \geq C_{2k-4}^2 + C_{2k-6}^2 + f(2k-5) + 2\times 2\\
&\geq C_{2k-4}^2 + C_{2k-6}^2 + C_{2k-8}^2 + f(2k-7) + 2\times 3\\
&\geq C_{2k-4}^2 + C_{2k-6}^2 + \cdots + C_4^2 + f(5) + 2\times(3k-3).
\end{aligned}$$

我們上面採用的方法主要是分類和遞歸。如果想求出一般的 $f(n,k)$ 或得到它的較好的估計, 改進方法無疑是十分必要的, 有興趣的讀者不妨一試。

參考文獻

1. P. Erdös and G. Szekeres, Compositio Math., 2(1953), 463-470.
2. G. C. Rota, Classic paper in combinatorics, Quinn-Woodbine Inc., 1987.

—本文作者任教於中國廣東深圳高級中學—