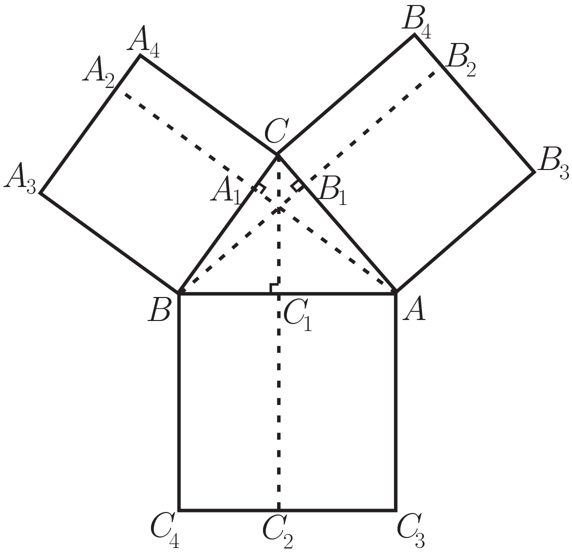
畢氏定理和餘弦定律的證明

張海潮

談幾何非談餘弦定律不可。餘弦定律既承畢氏定理於先, 又啓內積的概念於後, 在幾何學中具樞紐的地位, 它的證明值得一提。

大凡教科書中證明餘弦定律多從畢氏定理出發, 本文想從「證明畢氏定理的方法」出發, 一次解決「畢氏」和「餘弦」。(註一)

爲了便於證明, 假設 $\triangle ABC$ 是一個銳角三角形, 我們先在三個邊上各畫一個正方形, 面積分別爲 a^2, b^2, 和 c^2。然後作三邊上的高, 並且延長到正方形的邊上 (如圖一)。

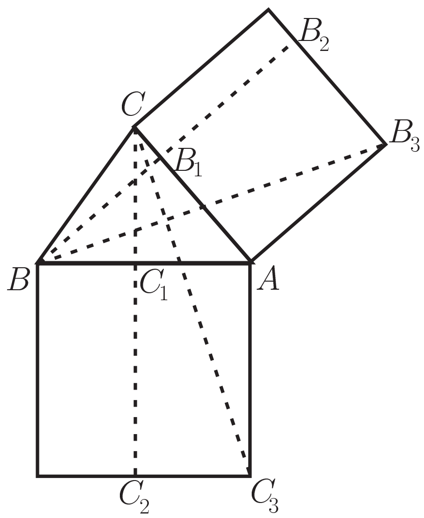


圖一

仿原來畢氏定理的證明 (見圖二及說明), 我們可以看出長方形 $AC_1C_2C_3$ 和長方形 $AB_1B_2B_3$ 的面積相等, 長方形 $BC_1C_2C_4$ 和長方形 $BA_1A_2A_3$ 的面積也相等。因此 a^2 +

註一: 畢氏定理的證明, 方法很多。本文採取的是歐基里德原本中的證明, 學過平面幾何的讀者應不陌生。

$b^2 - c^2$ 就等於長方形 $CB_1B_2B_4$ 和長方形 $CA_1A_2A_4$ 面積之和。而這個面積之和不外就是 $2ab\cos C$。(牽涉到的兩個長方形的面積其實都等於 $ab\cos C$)。



圖二

現在回到圖二, 拉兩條補助線, CC_3 和 BB_3, 因爲 $\triangle ABB_3$ 和 $\triangle ACC_3$ 全等, 並且它們的面積分別是長方形 $AB_1B_2B_3$ 和長方形 $AC_1C_2C_3$ 的面積之半。因此知道後二者的面積相等 — 這正是歐基里德原本的用以證明畢氏定理的方法。(註二)

—本文作者曾任教於臺灣大學數學系, 現已退休—

註二: 請參考曹亮吉: 阿草的葫蘆, 遠哲科學教育基金會出版, 第38頁。