梯形内一塊四邊形面積的探討

梁勇能

前言. 在2000年環球城市數學競賽 (International Mathematics Tournament of Towns) 的試題中有一題:「設梯形 $ABCD$ 的面積爲1, 其上底 BC 與下底 AD 的比值爲 $1:2$, 另 K 爲對角線 AC 的中點, L 爲直線 DK 與邊 AB 的交點。試求四邊形 $BCKL$ 的面積?」。由這個問題的解決中, 我們可以進一步獲得更廣泛的結果。

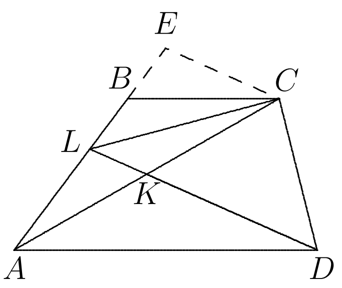
問題一: 梯形 $ABCD$ 面積爲1, $\overline{BC}:\overline{AD}=1:2$, $\overline{AK}=\overline{KC}$, 求四邊形 $BCKL$ 面積?

平面幾何: 過 C 做平行 $\overline{LK}$ 的直線, 交直線 AL 於 E 點。$\because \overline{LK}//\overline{CE}$, $\overline{AK}=\overline{KC}$

$$\therefore \overline{AL}=\overline{LE} \qquad \cdots\cdots(*)$$

爲書寫方便, 將 $\triangle ABC$ 的面積記爲 $S_{\triangle ABC}$, 以此類推。所以

$$S_{\triangle ALC}=S_{\triangle LCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACE} \qquad \cdots\cdots ①$$



圖一

又因爲 $\overline{BC}//\overline{AD}$, $\overline{LK}//\overline{CE}$, $\therefore \angle ALD=\angle BEC$, $\angle LAD=\angle EBC \rightarrow \triangle CBE \sim \triangle DAL$ (AA)

$\therefore \frac{\overline{AL}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\frac{2}{1}\rightarrow \overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AL}=\frac{1}{2}\overline{LE}$

$\therefore \overline{BE}=\overline{LB}\Rightarrow S_{\triangle LBC}=S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle LCE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACE} \qquad \cdots\cdots ②$

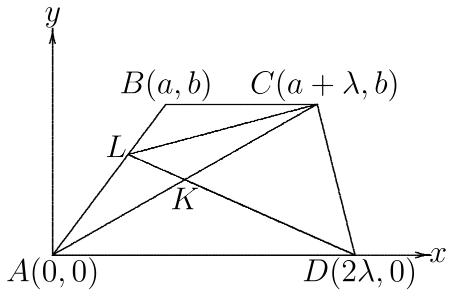
同理, $\overline{AK}=\overline{KC}, \Rightarrow S_{\triangle LKC}=S_{\triangle ALK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACE} \qquad \cdots\cdots ③$

$\therefore S_{\triangle LCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ECA}=2S_{\triangle BCE}, \Rightarrow S_{四邊形BCKL}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$。

$\because \overline{BC}:\overline{AD}=1:2\Rightarrow S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ACD}=1:2$ (等高),

故 $S_{\text{四邊形}BCKL}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}S_{\text{梯形}ABCD}=\frac{2}{9}\times 1=\frac{2}{9}$。

解析法: 在坐標平面上畫出梯形 $ABCD$, 將 A 點定於原點 $(0,0)$ 其他 $B(a,b)$, $C(a+\lambda,b)$, $D(2\lambda,0)$。$\because K$ 是 $\overline{AC}$ 的中點, $\therefore K(\frac{a+\lambda}{2},\frac{b}{2})$



圖二

直線 DL 的方程式: $y=\dfrac{0-\frac{b}{2}}{2\lambda-\frac{a+\lambda}{2}}(x-2\lambda)$
$$=\frac{-b}{4\lambda-a-\lambda}(x-2\lambda)$$
$$=\frac{b}{a-3\lambda}(x-2\lambda)$$

直線 AB 的方程式: $y=\dfrac{b}{a}x$

解聯立方程式 $\begin{cases} y=\frac{b}{a-3\lambda}(x-2\lambda) & \cdots\cdots\cdots(1)\\ y=\frac{b}{a}x & \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

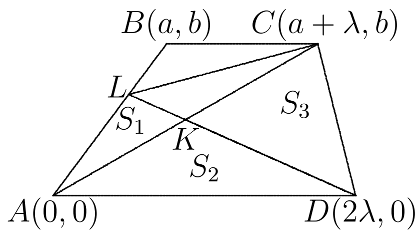
$\therefore x=\frac{2ab\lambda}{3b\lambda}=\frac{2}{3}a,\quad y=\frac{2}{3}a\times\frac{b}{a}=\frac{2}{3}b,\quad \therefore L(\frac{2}{3}a,\frac{2}{3}b)$

$\frac{S_{\triangle ALD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_1+S_3}{S_2+S_3}=\frac{\frac{2}{3}b}{b}=\frac{2}{3}$ (同底)

又因為 $S_2=S_3$

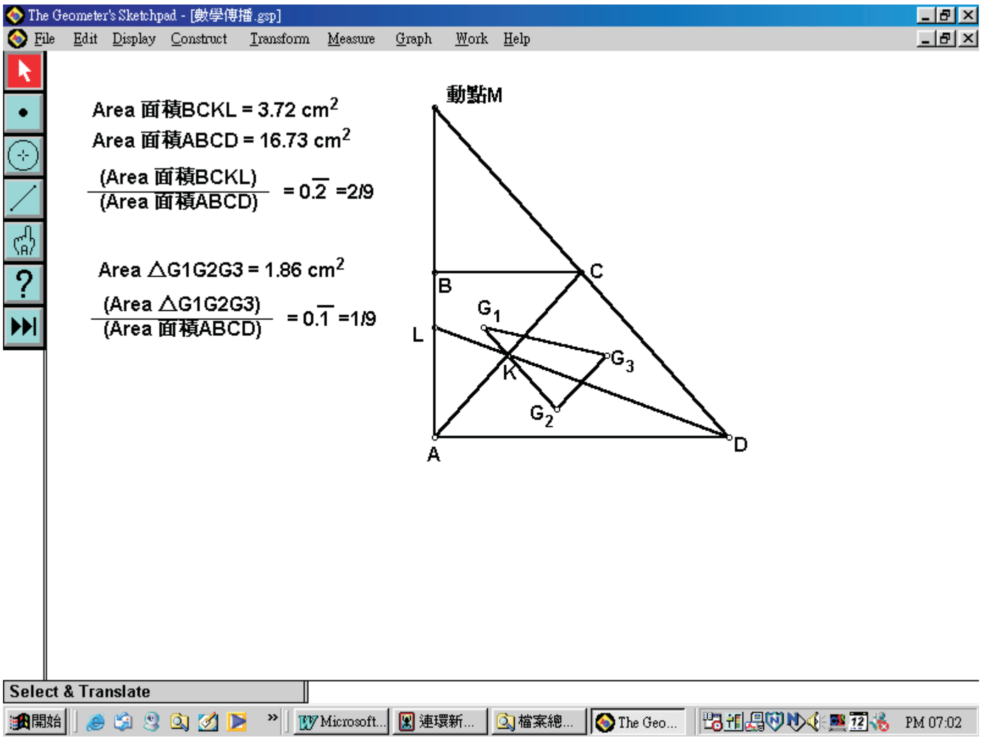
$$\frac{S_1+S_2}{2S_2}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3S_1+3S_2=4S_2,\qquad \therefore S_2=3S_1=S_{\triangle ABC}.$$

故
$$S_{\text{四邊形}BCKL}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}S_{\text{梯形}ABCD}$$
$$=\frac{2}{9}\times 1=\frac{2}{9}.$$



圖三

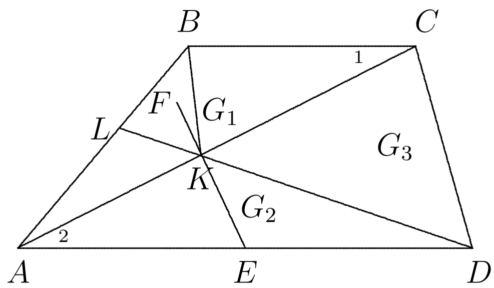
我們利用動態幾何軟體 GSP 的視窗 (圖四), 使 A、D 點固定, 另取一動點 M, 使得 B、C 分別為 $\overline{AM}$、$\overline{DM}$ 的中點。並分別作出 $\triangle ABC$、$\triangle AKD$、$\triangle DKC$ 的重心 G_1、G_2、G_3, 藉著拉動動點 M, 我們可以發現 $BCKL/ABCD$ 之面積比皆固定為 $0.\overline{2}$ (視窗中為第二位以後四捨五入), 亦即所求的 $\frac{2}{9}$。同時也有額外的發現!



圖四

> (1) $\overline{AC}$ 的中點 K, 一定會在 $\overline{G_1G_2}$ 上
> (2) $\triangle G_1G_2G_3$ 的面積 $=$ 梯形 $ABCD$ 面積的 $\frac{1}{9}$?

(1) 之證明:

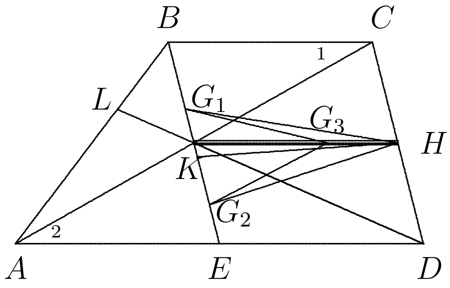


圖五

1. 做 $\triangle AKD$ 中 $\overline{AD}$ 的中線 $\overline{KE}$。$G_2 \in \overline{KE}$。
2. 做 $\triangle BAC$ 中 $\overline{AC}$ 的中線 $\overline{BK}$, $G_1 \in \overline{BK}$,
   $G_2 \in \overline{KE}$。
3. $\because \overline{BC}//\overline{AD}$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (見圖五)
   $\because E$ 是 $\overline{AD}$ 中點, $\therefore \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \overline{BC}$,
   加上 $\overline{AK} = \overline{KC}$,
   於是 $\triangle KCB \cong \triangle KAE$ (SAS),
   $\therefore \angle BKC = \angle AKE$。
4. $\because \overline{AK}$、$\overline{KC}$ 在同一直線上, 過 K 做線段 $\overline{G_2F}$, 則 $\angle AKG_2 = \angle FKC$ (對頂角相等)
   $\rightarrow \angle BKC = \angle FKC$, 所以 K 也在 $\overline{G_2F}$ 上, 故 K 點會在 $\overline{G_1G_2}$ 上。

(2) 之證明:

1. 由 (1) 中, 可知 $\triangle KCB \cong \triangle KAE$,
$\therefore \overline{BK} = \overline{KE}$。
$\because G_1$、G_2 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AKD$ 的重心。$\overline{BK}$、$\overline{KE}$ 分別是其中一條中線。
因此, $\overline{G_1K} = \frac{1}{3}\overline{BK}$, $\overline{KG_2} = \frac{2}{3}\overline{KE}$,
$\therefore \overline{G_1K}+\overline{KG_2} = \frac{1}{3}\overline{BK}+\frac{2}{3}\overline{BK} = \overline{BK} = \frac{1}{2}\overline{BE}$。

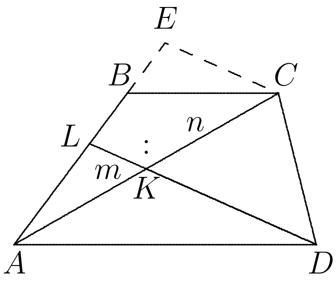


圖六

2. 連接 $\overline{G_1H}$、$\overline{G_2H}$ (H 是中點)
$\because \overline{KH}$ 是 $\triangle KCD$ 的中線,
$\therefore \overline{KG_3} = \frac{2}{3}\overline{KH} \Rightarrow S_{\triangle G_1KG_3} = \frac{2}{3}S_{\triangle G_1KH}$ (同高)。
同理 $S_{\triangle G_2KG_3} = \frac{2}{3}S_{\triangle G_2KH}$。因此, $S_{\triangle G_1G_2G_3} = \frac{2}{3}S_{\triangle G_1G_2H}$, 又因爲 $S_{\triangle G_1G_2H} = \frac{1}{2}\overline{G_1G_2}\times h$ (高); $S_{\text{四邊形}BCDE} = \overline{BE}\times h = 2\overline{G_1G_2}\times h$, 而 $S_{\triangle G_1G_2H} = \frac{1}{4}S_{\text{四邊形}BCDE}$。
$\therefore S_{\triangle G_1G_2G_3} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}S_{\text{四邊形}BCDE} = \frac{1}{6}S_{\text{四邊形}BCDE} = \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{9}S_{\text{梯形}ABCD}$。

推廣題目: 梯形 $ABCD$, 上底 $\overline{BC}$ 和下底 $\overline{AD}$ 的比爲 $1:t$, $\overline{AK}:\overline{KC} = m:n$, L 爲直線 $\overline{DK}$ 和 $\overline{AB}$ 的交點, 則四邊形 $BCKL$ 的面積和原來梯形 $ABCD$ 的面積有何關係?

解法: 仿照前面的作法, 做 $\overline{CE}//\overline{LK}$
$\Rightarrow \triangle ALK \sim \triangle AEC$ (AA)
$\therefore S_{\triangle ALK} = \frac{m^2}{(m+n)^2}S_{\triangle ACE}$ $\cdots\cdots$ ①
又 $\triangle EBC \sim \triangle LAD$ (AA)
有 $\frac{\overline{EB}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{t} \rightarrow \overline{EB} = \frac{1}{t}\overline{LA} = \frac{1}{t}\times\frac{m}{n}\times\overline{LE} = \frac{m}{tn}\overline{LE}$。



圖七

$\therefore \overline{LB} = \overline{LE} - \overline{BE} = \overline{LE} - \frac{m}{tn}\overline{LE} = \frac{tn-m}{tn}\overline{LE}$ $\cdots\cdots$(※※)

$S_{\triangle EBC} = \frac{m}{tn}S_{\triangle LEC} = \frac{m}{tn}\times\frac{n}{m+n}S_{\triangle ACE} = \frac{m}{t(m+n)}S_{\triangle ACE}$ $\cdots\cdots$ ②

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEC}-S_{\triangle ECB}=S_{\triangle ACE}\Big[1-\frac{m}{t(m+n)}\Big]=\frac{t(m+n)-m}{t(m+n)}S_{\triangle ACE}$ $\cdots\cdots$ ③

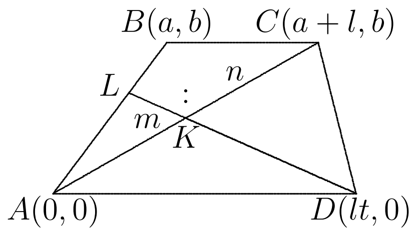
$$\frac{S_{\text{四邊形}BCKL}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ALK}}{\frac{t(m+n)-m}{t(m+n)}S_{\triangle ACE}}=\frac{\frac{t(m+n)-m}{t(m+n)}-\frac{m^2}{(m+n)^2}}{\frac{t(m+n)-m}{t(m+n)}}=\frac{2mnt+n^2t-m^2-mn}{m^2t+2mnt+n^2t-m^2-mn}$$

加上 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{1+t}S_{\text{梯形}ABCD}$。

$\frac{S_{\text{四邊形}BCKL}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{1}{1+t}\times\frac{2mnt+n^2t-m^2-mn}{m^2t+2mnt+n^2t-m^2-mn}$ $\cdots\cdots$(公式一)

解析方法: 因爲 $\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}=\frac{m}{n}$, 由分點公式
$K(\frac{m(a+\lambda)}{m+n},\frac{mb}{m+n})$,
則直線 KD 的方程式爲

$$y=\frac{\frac{mb}{m+n}}{\frac{m(a+\lambda)}{m+n}-\lambda t}(x-\lambda t).$$



圖八

直線 AB 的方程式: $y=\frac{b}{a}x$
因爲 L 是直線 AB 和直線 KD 的交點, 解聯立方程式

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ y=\frac{mb}{na+m\lambda-\lambda t(m+n)}(x-\lambda t)\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{a}x=\frac{mb}{ma+m\lambda-\lambda t(m+n)}(x-\lambda t)$$

可解得 $x=\dfrac{amt}{mt+nt-m},\quad y=\dfrac{bmt}{mt+nt-m}\quad \therefore L(\dfrac{amt}{mt+nt-m},\dfrac{bmt}{mt+nt-m})$

因此, $$\frac{S_{\text{四邊形}BCKL}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a & a+\lambda & \frac{m(a+\lambda)}{m+n} & \frac{amt}{mt+nt-m} & a\\ b & b & \frac{mb}{m+n} & \frac{bmt}{mt+nt-m} & b\end{matrix}\right\|}{\frac{1}{2}b\lambda(1+t)}$$ 化簡可得

$$=\frac{2mnt+n^2t-m^2-mn}{(1+t)(m^2t+2mnt+n^2t-m^2-mn)}$$ 與公式一的結果相同。

因爲 $m:n$ 的比例會影響 $\overline{LB}$ 的長度, 間接影響到四邊形 $BCKL$ 的形狀, 我們可以討論特例狀況。

(1) 當 四邊形 $BCKL$ 變成 $\triangle KCB$ (L 與 B 重合), 則 $\frac{S_{\triangle BCK}}{S_{\text{梯形}BCD}}=\frac{n^2}{(m+n)^2}$

(2) 當 四邊形 $BCKL$ 變成 $\triangle ABC$ (L 與 A 重合), 則 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{1}{1+t}$

(1) 之證明:

由 (⁎⁎) 式, 有 $\overline{LB}=\frac{tn-m}{tn}\overline{LE}$。

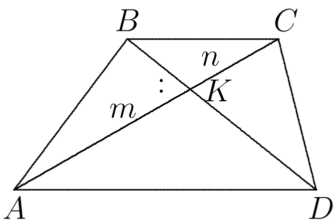
當 $tn=m$ 時, $\overline{LB}=0$, 此時四邊形 $BCKL$ 變成 $\triangle KCB$, 代入公式一。

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle BKC}}{S_{\text{梯形}ABCD}}&=\frac{1}{t+1}\times\frac{mnt+mnt-m^2-mn+n^2t}{m^2t+mnt+mnt+n^2t-m^2-mn}\\&=\frac{1}{t+1}\times\frac{mnt+(nt-m)(m+n)}{m^2t+mnt+(nt-m)(m+n)}=\frac{1}{1+t}\times\frac{mnt}{m^2t+mnt}=\frac{n^2}{(m+n)^2}\end{aligned}$$

再以實際的圖形來看。由圖九, 可以知道 $\triangle BCK\sim\triangle DAK$, 則 $\overline{BC}:\overline{AD}=n:m$, 由面積公式:

$$\frac{S_{\triangle BCK}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}nh}{\frac{1}{2}(m+n)\cdot\frac{(m+n)}{n}\cdot h}=\frac{n^2}{(m+n)^2}$$

和代入公式所得的結果相同。



圖九

(2) 之證明:

另一方面, 如果 $m=0$, 也就是 $\overline{LB}=\overline{LE}$, 此時, 四邊形變成 $\triangle ABC$ 代入公式一, 可以得到

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{1}{1+t}\times\frac{0+n^2t+0+0}{0+0+n^2t+0}=\frac{1}{1+t}$$

因此, 當直線 DK 交於 $\overline{AB}$ 時, 公式一皆能滿足要求。

> 如果直線 DK 交於 $\overline{BC}$ 時, $\frac{S_{\triangle CKL}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{tn^2}{m(m+n)(1+t)}$

由圖九, $\triangle CLK\sim\triangle AKD$ (AA)。

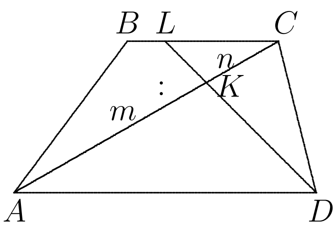
因此, $\frac{S_{\triangle CKL}}{S_{\triangle AKD}}=\frac{n^2}{m^2}$,

設 $S_{\triangle AKD}=ms$, $S_{\triangle CKD}=ns$

$\Rightarrow S_{\triangle CKL}=\frac{n^2}{m^2}\times ms=\frac{n^2}{m}s$,

又 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{1}{t}$,

　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{t}S_{\triangle ACD}=\frac{1}{t}(m+n)s$,



圖十

$$S_{\text{梯形}ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{t}(m+n)s+(m+n)s$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CKL}}{S_{梯形ABCD}} = \frac{\frac{n^2}{m}s}{\frac{1}{t}(m+n)s+(m+n)s} = \frac{tn^2}{m^2t+mnt+m^2+mn} = \frac{tn^2}{m(m+n)(1+t)}$$

$\cdots\cdots$(公式二)

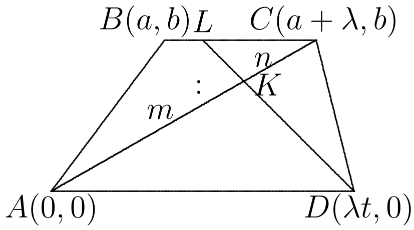
解析作法: $\begin{cases} y = b \\ y = \frac{mb}{m(a+\lambda)-\lambda t(m+n)}(x-\lambda t) \end{cases}$

可解出 $x = a+\lambda-\frac{n}{m}\lambda t,\ y = b,\ \therefore L(a+\lambda-\frac{n}{m}\lambda t, b)$。

因此, 在 $\triangle CLK$ 中, 底爲 $(a+\lambda)-(a+\lambda-\frac{n}{m}\lambda t) = \frac{n}{m}\lambda t$, 高爲 $b-\frac{mb}{m+n} = \frac{nb}{m+n}$

$\rightarrow S_{\triangle CLK} = \frac{1}{2}\times\frac{n}{m}\lambda t\times\frac{nb}{m+n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2tb\lambda}{m(m+n)}$,

故 $$\frac{S_{\triangle CKL}}{S_{梯形ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2tb\lambda}{m(m+n)}}{\frac{1}{2}b\lambda(1+t)} = \frac{n^2t}{m(m+n)(1+t)}$$

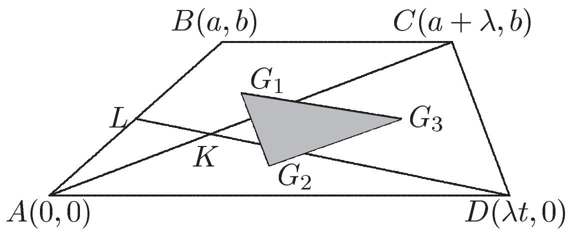


圖十一

公式二的結果相同。

由 $\triangle ABC$、$\triangle AKD$、$\triangle CKD$ 的重心所圍成的三角形面積和梯形的面積是否仍有 $1/9$ 的關係?

解: 由重心的坐標公式, 可以算出



圖十二

$$G_1 = \left(\frac{2a+\lambda}{3}, \frac{2b}{3}\right)$$

$$G_2 = \left(\frac{\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+\lambda t}{3}, \frac{\frac{mb}{m+n}}{3}\right)$$

$$G_3 = \left(\frac{\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+a+\lambda+\lambda t}{3}, \frac{\frac{mb}{m+n}+b}{3}\right)$$

$$\frac{S_{\triangle G_1G_2G_3}}{S_{梯形ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{2a+\lambda}{3} & \frac{\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+\lambda t}{3} & \frac{\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+a+\lambda+\lambda t}{3} & \frac{2a+\lambda}{3} \\ \frac{2b}{3} & \frac{\frac{mb}{m+n}}{3} & \frac{\frac{mb}{m+n}+b}{3} & \frac{2b}{3} \end{matrix}\right\|}{\frac{1}{2}b\lambda(1+t)}$$

$$分子 = \frac{1}{9}\left[\frac{mb}{m+n}(2a+\lambda)+\left(\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+\lambda t\right)\left(\frac{mb}{m+n}+b\right)+2b\left(\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+\lambda t+a+\lambda\right)\right]$$

$$-\left[2b\left(\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+\lambda t\right)+\frac{mb}{m+n}\left(\frac{m(a+\lambda)}{m+n}+\lambda t+a+\lambda\right)+(2a+\lambda)\left(\frac{mb}{m+n}+b\right)\right]$$

$$=\frac{1}{9}(b\lambda t+b\lambda)=\frac{1}{9}b\lambda(1+t)$$

$$\frac{S_{\triangle G_1G_2G_3}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{\frac{1}{9}b\lambda(1+t)}{\lambda(1+t)}=\frac{1}{9}.$$

結論

設梯形 $ABCD$, 上底 $\overline{BC}$ 和下底 $\overline{AD}$ 的比爲 $1:t$, $\overline{AK}:\overline{KC}=m:n$, L 爲直線 DK 和 $\overline{AB}$ 的交點, 則有下面的結果:

(a) 如果直線 AK 交 $\overline{AB}$ 於 L, 則

$$\frac{S_{\text{四邊形}BCKL}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{2mnt+n^2t-m^2t-mn}{(1+t)(m^2t+2mnt+n^2t-m^2-mn)}$$

(b) 如果直線 AK 交 $\overline{AC}$ 於 L, 則

$$\frac{S_{\triangle CKL}}{S_{\text{梯形}ABCD}}=\frac{tn^2}{m(m+n)(1+t)}$$

(c) 由 $\triangle ABC$、$\triangle AKD$、$\triangle CKD$ 的重心所圍成的三角形面積恰好是原梯形 $ABCD$ 面積的 $\frac{1}{9}$, 如果是內心、外心則沒有類似的關係。

參考文獻

1. 國民中學數學第五冊
2. 國民中學選修數學第五冊
3. 高級中學數學第二冊

—本文作者任教於百齡高中—