

兩直角三角形族的各心軌跡 —— GSP 數學實驗舉隅

顏貽隆

摘要: 固定圓 Γ , 令 $\triangle ABC$ 為其內接三角形, 且 B, C 對稱於圓心。讓 B, C 不動, 且 A 在 Γ 上繞行; 或讓 A 不動, B, C 對稱於圓心, 且 B 在 Γ 上繞行, 我們可分別得到兩類直角三角形族。我們以 GSP 為輔助工具, 來探討這兩類直角三角形族的內心及三個傍心所分別形成的軌跡, 發現它們分別為圓形及蚘線 (Limacon), 並進而導出其方程式。

一、前言

設 $\triangle ABC$ 為一個三角形, 其中 B, C 兩點不動, 頂點 A 在圓 O 上繞行, 當 A 點在圓 O 繞行一圈後, 我們想觀察此時所有 $\triangle ABC$ 的內心 (I) 及三個傍心 (I_a, I_b, I_c) 的軌跡圖形為何? 透過幾何作圖軟體 The Geometry SketchPad (簡稱 GSP) 所提供的動態特性, 當我們改變點或線的相關位置後, 可觀察到改變後的圖形, 但令人失望的是, 並未發現有任何特別之處。

藉著 GSP 所提供動態的特性, 在不斷嘗試後, 我們觀察到頗為令人鼓舞的現象: 令 $\triangle ABC$ 為定圓 Γ 的內接三角形, 且 B, C 對稱於圓心, 若 B, C 不動, 而讓 A 點在 Γ 上繞行一圈後, 可得一直角三角形族 (稱為第一類), 該三角形族的內心及三個傍心分別形成的軌跡構成兩個圓。若 A 不動, B, C 對稱於圓心, 讓 B 點在 Γ 上繞行半圈後, 可得另一直角三角形族 (稱為第二類), 該三角形族的內心及三個傍心分別形成的軌跡構成一個蚘線 (Limacon)。

個人使用 GSP 已多時, 之前較著重以 GSP 當教學輔助工具。兩類直角三角形族各心的軌跡, 乃透過 GSP 所提供動態的特性, 可便捷地觀察各種直角三角形的各心分別形成的軌跡。在處理大量圖形的變化時, 如果沒有 GSP 當輔助工具, 恐怕是曠日費時的工作。尤其是蚘線, 能在短時間內找到漂亮的結果, 要歸功於 GSP 的協助。以 GSP 為輔助工具, 觀察各種不同

狀態下的圖形, 再從圖形的變化得到結論, 最後給予數學的證明, 此種先觀察後歸納再證明的模式, 就是數學歸納法。

我們將所有觀察到的現象, 歸納於表一。我們將在第二, 第三兩節裡提供數學的證明。

表一. 兩類直角三角形族各心的軌跡及其方程式

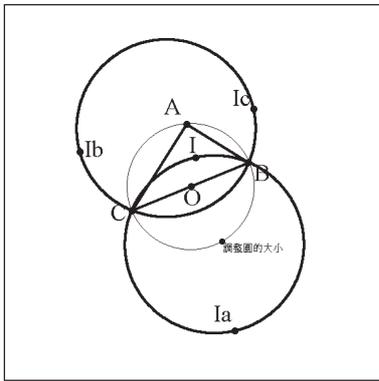
類別 心別	第一類 (圓)	第二類 (蚶線)
∠A 內的傍心	$r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta),$ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta),$ $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}), \theta \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}), \theta \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$
∠C 內的傍心	$r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta),$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta),$ $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$	$r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$
內心	$r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta),$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta),$ $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$	$r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$
∠B 內的傍心	$r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta),$ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta),$ $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a,$ $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

二、第一類直角三角形族的各心軌跡

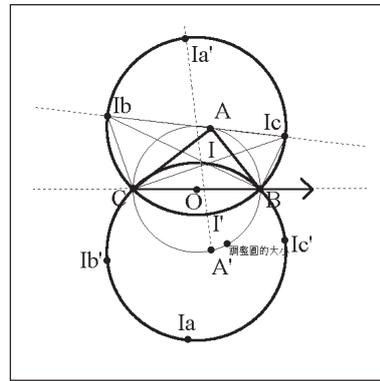
固定圓 Γ , 令 $\triangle ABC$ 為其內接三角形, 且 B, C 對稱於圓心, 因此 $\triangle ABC$ 必為一個直角三角形。若 B, C 不動, 而讓 A 點在 Γ 上繞行, 我們可得一直角三角形族。

定理一: 令 $\triangle ABC$ 為定圓 Γ 的內接三角形, 且 B, C 對稱於圓心, 若 B, C 不動, 而讓 A 點在 Γ 上繞行一圈後, 可得一直角三角形族, 該三角形族的內心及三個傍心, 共四個點軌跡構成兩個圓 (見圖一)。

在圖二中，我們選擇 C 點為極點、射線 \overrightarrow{CB} 為極軸建立一個極坐標系。如此，若定圓 Γ 的半徑為 a ，圓 Γ 的極坐標方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta$ ， $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。對極軸 \overrightarrow{CB} 作 A 點的對稱點 A' ，若 A 點在 Γ 上繞行一圈，則 A 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos \theta, \theta)$ ， $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ； A' 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos \theta, -\theta)$ ， $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，兩者表同一個圓，只是形成圓的方向相反。當 A 與 A' 兩點同時在 Γ 上繞行一圈，兩直角三角形族 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'BC$ 互相對應的內心與三個傍心都有相同的軌跡只是形成軌跡的方向相反。



圖一



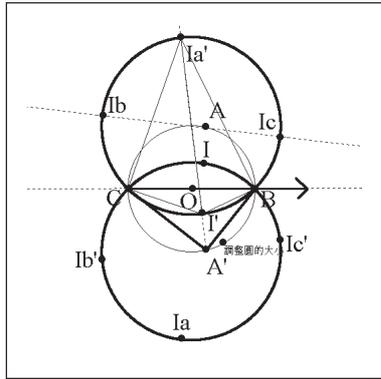
圖二

引理 2.1: 設 $\triangle A'BC$ 的內心及三個傍心分別為 I' ， I_a' ， I_b' ， I_c' ，則 I_b ， I' ， I_c ， I_a' 及 I_b' ， I_a ， I_c' ， I 四點分別共圓。

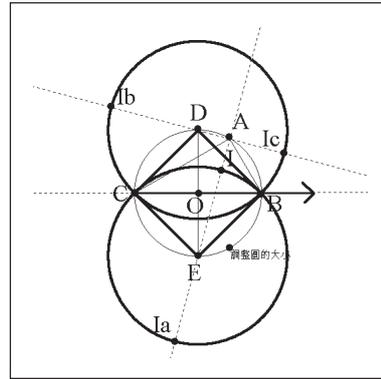
證明: 在圖二中，因為 $\overline{CI_c}$ ， $\overline{CI_b}$ 分別在 $\angle C$ 的內角平分線及外角平分線上，所以 $\angle I_bCI_c = \frac{\pi}{2}$ ，同理可得 $\angle I_bBI_c = \frac{\pi}{2}$ ，也就是 B ， C 兩點在以 $\overline{I_bI_c}$ 為直徑的圓上。在圖三中，同理可得 $\angle I'CI_a' = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle I'BI_a' = \frac{\pi}{2}$ ，也就是 B ， C 兩點在以 $\overline{I'I_a'}$ 為直徑的圓上。由此可得 I_b ， I' ， I_c ， I_a' 四點共圓，也就是 I_b ， I ， I_c ， I_a 四點共圓。同理可證 I_b' ， I_a ， I_c' ， I 四點共圓，也就是 I_b ， I_a ， I_c ， I 四點共圓。證畢。

引理 2.2: 設 $\overline{I_bI_c}$ 及 $\overline{I_aI}$ 分別交圓 Γ 於 D ， E 兩點 (異於 A 點)，則四邊形 $BDCE$ 為正方形。

證明: 在圖四中，因為 $\angle CDE = \frac{1}{2}\widehat{CE} = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \angle CED = \frac{\pi}{4}$ ，又 $\angle BDE = \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{BD} = \angle BED = \frac{\pi}{4}$ ，且 $\overline{DE} = \overline{DE}$ ，所以 $\triangle CDE \cong \triangle BDE$ ，可得 $\overline{CD} = \overline{BD}$ ， $\overline{CE} = \overline{BE}$ ，又 $\angle DCE = \angle CEB = \angle EBD = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$ ，因此可得四邊形 $BDCE$ 為正方形。證畢。



圖三



圖四

若定圓 Γ 的半徑為 a , 圓 Γ 的極坐標方程式為 $(2 \cdot a \cdot \cos \theta, \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。由引理 2.2 可知 I_b, I, I_c, I_a 四點外接圓的半徑為 $\sqrt{2} \cdot a$ 。因為 A 點在圓 Γ 上繞行, 所以 A 點的極坐標可設為 $(2 \cdot a \cdot \cos \theta, \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。我們分別在引理 2.3 討論內心軌跡, 而在引理 2.4~2.6 討論 $\angle A, \angle B, \angle C$ 傍心的軌跡。

引理 2.3: 內心軌跡為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$ 。

證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖五中, 設 $\overline{CI_c}$ 交圓 Γ 於 F 點, 因為 $\angle CII_a = \frac{1}{2}(\widehat{CE} + \widehat{AF}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, 所以 I 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2})$ 。由此可知: 所有 I 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 。

第二種情形 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$: 在圖六中, 設 $\overline{CI_c}$ 交圓 Γ 於 F 點, 因為 $\angle CII_a = \frac{1}{2}(\widehat{CE} + \widehat{AF}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$, 所以 I 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2})$ 。由此可知: 所有 I 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$ 。證畢。

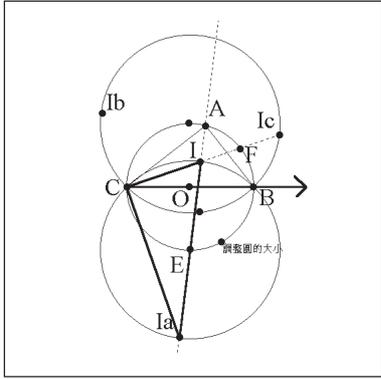
引理 2.4: $\angle A$ 內的傍心軌跡為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 。

證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

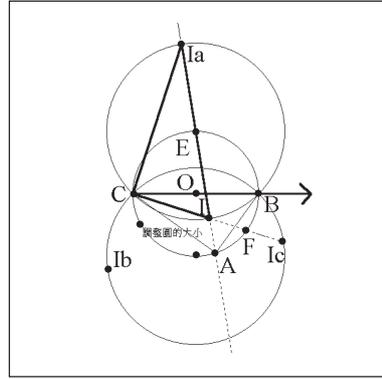
第一種情形 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖五中, 因為 $\angle CI_a I = \frac{\pi}{2} - \angle CII_a = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$, 所以 I_a 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})$ 。由此可知: 所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(-\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$, 又 $\cos(-\theta) = \cos \theta$, 因此所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 。

第二種情形 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$: 在圖六中, 因為 $\angle CI_a I = \frac{\pi}{2} - \angle CII_a = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, 所以 I_a 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})$ 。由此可知: 所有 I_a 點的軌跡方程式為

$r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, 又 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 且 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ 的週期為 π , 因此所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 。證畢。



圖五



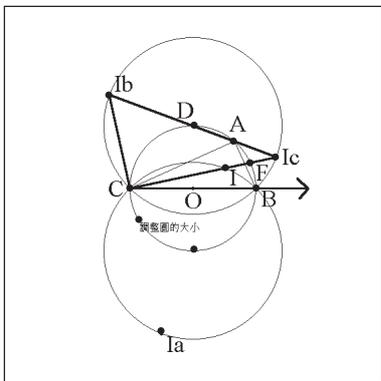
圖六

引理 2.5: $\angle C$ 內的傍心軌跡為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$ 。

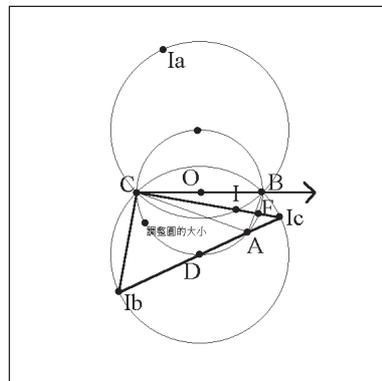
證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖七中, 設 $\overline{CI_c}$ 交圓 Γ 於 F 點, 因為 $\angle CI_c I_b = \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AF}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$, 所以 I_c 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2})$ 。由此可知: 所有 I_c 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 。

第二種情形 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$: 在圖八中, 設 $\overline{CI_c}$ 交圓 Γ 於 F 點, 因為 $\angle CI_c I_b = \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AF}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, 所以 I_c 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2})$ 。由此可知: 所有 I_c 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$ 。證畢。



圖七



圖八

引理 2.6: $\angle B$ 內的傍心軌跡為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}]$ 及 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 。

證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖七中, 因為 $\angle CI_bI_c = \frac{\pi}{2} - \angle CI_cI_b = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, 所以 I_b 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}), \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})$ 。由此可知: 所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, 又 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 且 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ 的週期為 π , 因此所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4})$ 。

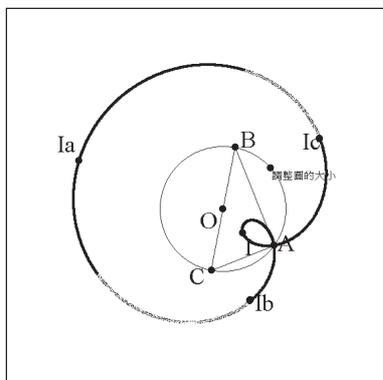
第二種情形 $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0)$: 在圖八中, 因為 $\angle CI_bI_c = \frac{\pi}{2} - \angle CI_cI_b = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$, 所以 I_b 點的極坐標為 $(2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})$ 。由此可知: 所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(-\theta - \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{2})$, 又 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 且 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(-\theta - \frac{\pi}{4})$ 的週期為 π , 因此所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)$, $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 。證畢。

綜合引理 2.1 至引理 2.6 的結論, 即為定理一。

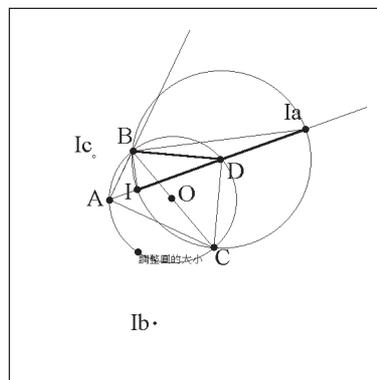
三、第二類直角三角形族的各心軌跡

固定圓 Γ , 令 $\triangle ABC$ 為其內接三角形, 且 B, C 對稱於圓心, 因此 $\triangle ABC$ 必為一個直角三角形。若 A 不動, B, C 對稱於圓心, 而讓 B 點在 Γ 上繞行半圈後, 我們可得一直角三角形族。

定理二: 令 $\triangle ABC$ 為定圓 Γ 的內接三角形, 且 B, C 對稱於圓心, 若 A 不動, B, C 對稱於圓心, 而讓 B 點在 Γ 上繞行半圈後, 可得一直角三角形族, 該三角形族的內心及三個傍心共四個點, 軌跡構成一個蚘線 (Limacon), 見圖九。



圖九



圖十

引理 3.1: 令直線 $\overleftrightarrow{II_a}$ (即 $\angle A$ 的內角平分線) 交圓 Γ 於 D 點, 則 B, I_a, C, I 四點共圓且 $\overline{DI} = \overline{DI_a}$ 。

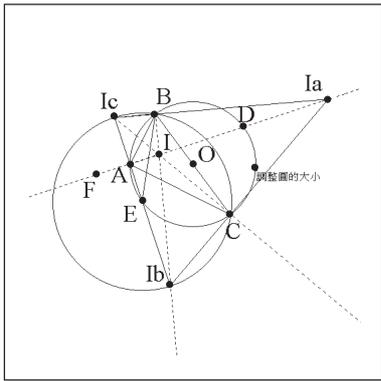
證明: 在圖十中, 因為 $\overline{BI}, \overline{BI_a}$ 分別在 $\angle B$ 的內角平分線及外角平分線上, 所以 $\angle IBI_a = \frac{\pi}{2}$, 同理可得 $\angle ICI_a = \frac{\pi}{2}$, 也就是 B, C 兩點在以 $\overline{II_a}$ 為直徑的圓上。又 $\angle BAI_a = \angle CAI_a = \frac{\pi}{4}$, $\angle CBD = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \frac{\pi}{4}$ 。而且 $\angle DBI = \frac{\pi}{4} + \angle CBI = \frac{\pi}{4} + \angle ABI = \angle BID$, 可得 $\overline{BD} = \overline{DI}$ 。因此可得 $\overline{DI} = \overline{DI_a}$ 。證畢。

引理 3.2: 令直線 $\overleftrightarrow{I_bI_c}$ (即 $\angle A$ 的外角平分線) 交圓 Γ 於 E 點, 則 I_b, I_c, B, C 四點共圓且 $\overline{EI_b} = \overline{EI_c}$ 。

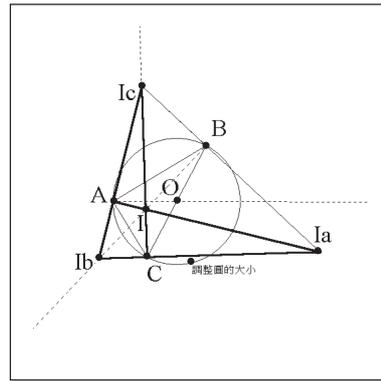
證明: 在圖十一中, 因為 $\overline{BI_b}, \overline{BI_c}$ 分別在 $\angle B$ 的內角平分線及外角平分線上, 所以 $\angle I_bBI_c = \frac{\pi}{2}$, 同理可得 $\angle I_bCI_c = \frac{\pi}{2}$, 也就是 B, C 兩點在以 $\overline{I_bI_c}$ 為直徑的圓上。又 $\angle CAI_b = \angle BAI_c = \frac{\pi}{4}$, 可得 $\widehat{CE} = \frac{\pi}{2}$ 。而且 $\angle AI_bB = \frac{\pi}{4} - \angle ABI_b = \frac{\pi}{4} - \angle CBI_b = \angle EB I_b$, 可得 $\overline{EB} = \overline{EI_b}$ 。因此可得 $\overline{EI_b} = \overline{EI_c}$ 。證畢。

引理 3.3: $\overline{II_a} = \overline{I_bI_c}$ 。

證明: 在圖十二中, 因為 $\angle IAI_b = \angle ICI_b = \frac{\pi}{2}$, 所以 I, A, I_b, C 四點共圓, 可得 $\angle CII_a = \angle CI_bI_c$ 。又 $\angle I I_b C = \frac{1}{2}\widehat{CI} = \frac{\pi}{4}$, $\angle C I I_b = \frac{1}{2}\widehat{CI_b} = \frac{\pi}{4}$, 可得 $\overline{CI} = \overline{CI_b}$ 。在 $\triangle ICI_a$ 與 $\triangle I_bCI_c$ 中, $\angle ICI_a = \angle I_bCI_c = \frac{\pi}{2}$, $\angle CII_a = \angle CI_bI_c$ 與 $\overline{CI} = \overline{CI_b}$, 所以 $\triangle ICI_a \cong \triangle I_bCI_c$, 因此可得 $\overline{II_a} = \overline{I_bI_c}$ 。證畢。



圖十一



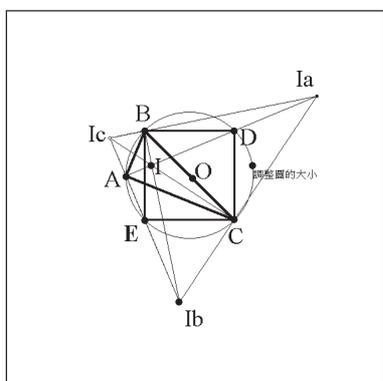
圖十二

綜合引理 3.1 至引理 3.3 的結論, 可得 I, I_a, I_b, I_c 四點同在以圓 Γ 為基圓的蚶線 (Limacon) 上。

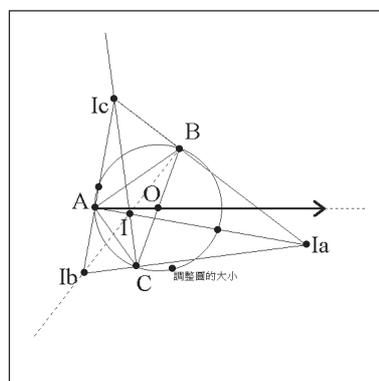
引理 3.4: 四邊形 $BDCE$ 為正方形。

證明: 在圖十三中, 由引理 3.1 可得 $\overline{BD} = \overline{CD}$; 由引理 3.2 可得 $\overline{BE} = \overline{CE}$, 又 $\angle DCE = \angle CEB = \angle EBD = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$, 因此可得四邊形 $BDCE$ 為正方形。證畢。

在圖十四中, 我們選擇 A 點為極點、射線 \overrightarrow{AO} 為極軸建立一個極坐標系。如此, 若定圓 Γ 的半徑為 a , 圓 Γ 的極坐標方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。由引理 3.1~3.4 可知 I_b, I_c, B, C 及 I_b, I, I_c, I_a 四點外接圓的半徑相等且等於 $\sqrt{2} \cdot a$ 。因為 B 點在圓 Γ 上繞行, 所以 B 點的極坐標可設為 $(2 \cdot a \cdot \cos \theta, \theta), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。我們分別在引理 3.5 討論內心軌跡, 而在引理 3.6~3.8 討論 $\angle A, \angle B, \angle C$ 傍心的軌跡。



圖十三



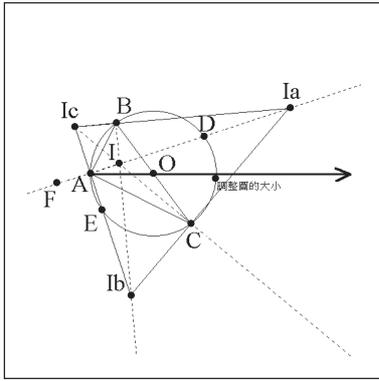
圖十四

引理 3.5: 內心軌跡為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 。

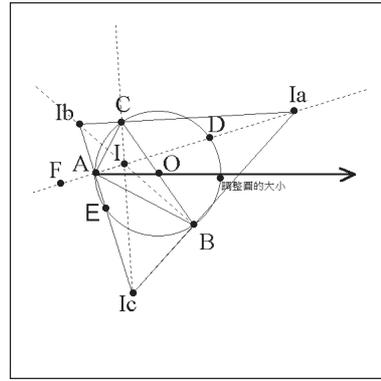
證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖十五中, 設 F 為射線 \overrightarrow{TA} 上的一點, 因為 $\angle BAF = \frac{3\pi}{4}$, 所以 D 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} + \theta), \frac{3\pi}{4} + \theta)$ 。又 $\overline{DI} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) + \sqrt{2} \cdot a, \frac{3\pi}{4} + \theta)$ 。由此可知: 所有 I 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 。

第二種情形: $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$: 在圖十六中, 設 F 為射線 \overrightarrow{TA} 上的一點, 因為 $\angle BAF = \frac{3\pi}{4}$, 所以 D 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(-\frac{3\pi}{4} + \theta), -\frac{3\pi}{4} + \theta)$ 。又 $\overline{DI} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(-\frac{3\pi}{4} + \theta) + \sqrt{2} \cdot a, -\frac{3\pi}{4} + \theta)$ 。由此可知: 所有 I 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4})$, 又 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$ 的週期為 2π , 因此所有 I 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 。證畢。



圖十五



圖十六

引理 3.6: $\angle A$ 內的傍心軌跡為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ 。

證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖十五中, 因為 $\angle OAD = \theta - \frac{\pi}{4}$, 所以 D 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4}), \theta - \frac{\pi}{4})$ 。又 $\overline{DI_a} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I_a 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot a, \theta - \frac{\pi}{4})$ 。由此可知: 所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, 又 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$ 的週期為 2π , 因此所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ 。

第二種情形: $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0)$: 在圖十六中, 因為 $\angle OAD = \theta + \frac{\pi}{4}$, 所以 D 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{4}), \theta + \frac{\pi}{4})$ 。又 $\overline{DI_a} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I_a 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot a, \theta + \frac{\pi}{4})$ 。由此可知: 所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, 且 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$ 的週期為 2π , 因此所有 I_a 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$, $\theta \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ 。證畢。

引理 3.7: $\angle B$ 內的傍心軌跡為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 。

證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖十五中, 因為 $\angle OAE = (\frac{\pi}{2} - \theta) + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \theta$, 所以 E 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{3\pi}{4}), \theta - \frac{3\pi}{4})$ 。又 $\overline{EI_b} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I_b 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{3\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot a, \theta - \frac{3\pi}{4})$ 。由此可知: 所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$, 又 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$ 的週期為 2π , 因此所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$, $\theta \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ 。

第二種情形: $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$: 在圖十六中, 因為 $\angle OAE = -\theta + \frac{\pi}{4}$, 所以 E 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(-\theta + \frac{\pi}{4}), -\theta + \frac{\pi}{4})$ 。又 $\overline{EI_b} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I_b 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(-\theta + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot a, -\theta + \frac{\pi}{4})$ 。由此可知: 所有 I_b 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 。證畢。

引理 3.8: $\angle C$ 內的傍心軌跡為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 及 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ 。

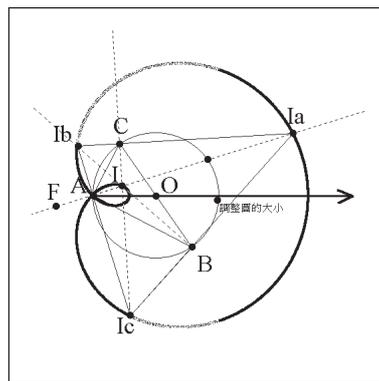
證明: 我們針對 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 兩種情形分別處理:

第一種情形: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: 在圖十五中, 因為 $\angle OAI_c = \theta + \frac{\pi}{4}$, 所以 E 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{4}), \theta + \frac{\pi}{4})$ 。又 $\overline{EI_c} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I_c 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot a, \theta + \frac{\pi}{4})$ 。由此可知: 所有 I_c 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 。

第二種情形: $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$: 在圖十六中, 因為 $\angle OAI_c = -\theta + \frac{\pi}{4}$, 所以 E 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4}), \theta - \frac{\pi}{4})$ 。又 $\overline{EI_c} = \sqrt{2} \cdot a$, 可得 I_c 點的極坐標為 $(2 \cdot a \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot a, \theta - \frac{\pi}{4})$ 。由此可知: 所有 I_c 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, 且 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a$ 的週期為 2π , 因此所有 I_c 點的軌跡方程式為 $r = 2 \cdot a \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cdot a, \theta \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ 。證畢。

綜合引理 3.1 至引理 3.8 的結論, 即為定理二。

在本文結束前, 我們要指出, 當 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$, 第二類三角形族的內心及三個傍心共四個點的軌跡為同一個蚌線; 但 $\angle B$ 和 $\angle C$ 內的傍心在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 及 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 所構成的圖形前後互換 (見圖十七)。非常感謝審查委員的寶貴意見, 我們才得以用比較簡捷的方法完成證明部份。也感謝國立交通大學應用數學系黃大原教授、陳明璋教授對本文的修正與指導。



圖十七

參考資料

1. 趙文敏 (2000)。蚘線。2002年12月5日，
取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/sm/sm_21_07_1/
2. 台師大數學系網路小組 (1999)。動態幾何入門指引。台北：九章出版社。
3. *The Geometer's Sketchpad Version 4 Reference Manual* (2002), CA: Key Curriculum Press.

—本文作者任教於新竹科學園區實驗高級中學—