關於 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則的一個註記

姚雲飛

摘要. 本文對現行的數學分析, 微積分及其高等數學的教材中的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則進行了一個改進, 論證了該法則在無須考慮分子是否趨於 ∞ 的條件時, 仍舊成立, 利用了這個減弱了的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則給出了一大類的極限問題的簡單解法。

關鍵詞: 改進的 L' Hospital 法則; 減弱; 極限。

在現行的數學分析、微積分及其高等數學的教材中 [1−5] 關於 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則是指: 若

(I) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$;

(II) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$;

(III) f, g 在 $U_+^0(x_0)$ 內可微分, $g'(x)\neq 0$, 其中 $U_+^0(x_0)$ 為 x_0 之右鄰域;

(IV) $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可為實數, 也可以為 $+\infty$ 或 $-\infty$),

則 $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

本法則對於 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$, $\pm\infty$ 等情形也有同樣的結論, 該法則對處理 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式極限是一個強有力的工具, 但是在使用時, 需要四個條件同時滿足方可。事實上該法則的條件 (I) 是可以去掉的。本文將證明該法則在保留 (II)、(III)、(IV) 而在沒有條件 (I) 之下, 結論仍然成立。同時給出其一些應用, 進而簡化了一些文獻中的一大類極限命題的證明。使這個法則適用範圍更廣、更便利、更具有一些靈活性。為此本文稱這樣的法則為減弱了一個條件的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則。下面證其成立, 事實上, 只要仔細考察 [2] 中 P.128-129 的推理過程知不需要用到條件 (I)。

首先設 A 爲實數, 由條件 (II) 知 $\exists U_+^0(x_0)$, 使得 $\forall x \in U_+^0(x_0)$, 恆有 $g(x) \neq 0$, 由 (IV) 知對 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in U_+^0(x_0)$ 使得 $\forall x \in (x_0, x_1)$, 均有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1}$$

根據柯西均值定理 [1] 知 $\forall x \in (x_0, x_1)$, $\exists \xi$ 滿足 $x_0 < x < \xi < x_1$, 使得

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

由 (1) 知

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - A &= \frac{f(x) - f(x_1) - A(g(x) - g(x_1)) + f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \\
&= \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} \left(\frac{f(x) - g(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right) + \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \\
&= \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) \left(\frac{f(x) - g(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right) + \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

對固定的 x_1, 由條件 (II) 知當 $x \to x_0^+$ 時, $\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}$ 與 $\frac{g(x_1)}{g(x)}$ 均爲無窮小量, 因此, 必 $\exists \delta > 0$, 使得 $x_0 < x < x_0 + \delta \leq x_1$ 時, 有

$$\left|\frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 1 \tag{5}$$

由 (3) 式知綜合 (2)、(4)、(5), 對一切滿足不等式 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 的 x 有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| &\leq \left(1 + \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\right) \left|\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right| + \left|\frac{f(x) - Ag(x_1)}{g(x)}\right| \\
&< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

故 $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

類似地可證, 當 $A = +\infty$ 或 $A = -\infty$ 的情形。同時不難看出, 對於 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0$ 或 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 或 $x \to \infty$ 過程仍成立。

現舉例說明 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L' Hospital 法則在去掉條件 (I) 之後應用起來多麼方便, 並且可以大大簡化一些文獻中的極限命題的證明。

例 1: [6] 若 (i) $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 具有一階連續的導函數: (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi'(x)+\varphi(x))=A$, 則 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=A$。

特別當 A 爲有限數時, 則 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$。

證明: 設 $\psi=\varphi'(x)+\varphi(x)$, 於是由於題設條件知 $\psi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 連續, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)$ $=A$, 而 $(e^x\varphi(x))'=e^x\psi(x)$

任意固定 x_0, $(x_0\geq a)$, 將上式從 x_0 到 $x(x>x_0)$ 積分得

$$\int_{x_0}^{x}(e^t\varphi(t))'dt=\int_{x_0}^{x}e^t\psi(t)dt, \quad \text{於是} \quad e^x\varphi(x)=e^{x_0}\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x}e^t\psi(t)dt \quad \text{從而}$$

$$\varphi(x)=\frac{\int_{x_0}^{x}e^t\psi(t)dt+e^{x_0}\varphi(x_0)}{e^x}$$

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, 由已知條件與減弱的 L' Hospital 法則知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^{x}e^t\psi(t)dt+e^{x_0}\varphi(x_0)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_{x_0}^{x}e^t\psi(t)dt+e^{x_0}\varphi(x_0)\right)'}{(e^x)'}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\psi(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=A.\end{aligned}$$

此處證法比 [6] 中簡單得多。

例 2: [7−8] 設函數 f 在 $(a,+\infty)$ 內可微分, 證明: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$, 則 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ $=A$。

證明: 顯然本題滿足減弱的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則, 故有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A$$

可見本處證法較 [7, 8] 簡潔多了。

推論: [8] 設函數 f 在 $(a,+\infty)$ 可微分, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$, 則 $A=0$ 同時不難發現仿例2之證法同理可論下面的例3。

例 3: [9] 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 內可微分, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$, 則 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

證明: 顯見本題滿足減弱的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則, 於是有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{(x)'}=\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$$

顯然這個例3的證法簡化了 [8] 的解法。

例 4: [2] 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 連續, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。則

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A.$$

證明: 由 f 在 $[0,+\infty)$ 連續, 知 $\int_0^x f(t)dt$ 可微分, 在本文法則中取 $g(x)=x$, 則 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $g'(x)=1$, 從而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{(x)'}\\&=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\end{aligned}$$

例 5: [10] 求下列極限

(i) $\lim\limits_{x\to0^+} x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt.$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}.$

(iii) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln\frac{1}{x}}.$

(iv) $\lim\limits_{x\to0^+} x^a\int_x^1\frac{f(t)}{t^{a+1}}dt$ (其中 $a>0$, $f\in C[0,1]$)。(符號 $C[0,1]$ 表示定義在 $[a,b]$ 的連續函數的全體)。

解: 應用本文的減弱的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則很容易求出本題的解。

(i) $$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt&=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to0^+}\cos x=1\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt\right)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(iii) $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)'}{\left(\ln\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{e^{-x}}{x}}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{-x}=1$$

(iv) $$\lim_{x\to 0^+} x^a \int_0^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}}dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}}dt}{\frac{1}{x^a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}}dt\right)'}{\left(\frac{1}{x^a}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{f(x)}{x^{a+1}}}{-\frac{a}{x^{a+1}}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{a} f(x) = \frac{1}{a} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{f(0)}{a}.$$

本文諸例說明了減弱了一個條件的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則應用起來多麼方便, 因此建議今後在編寫數學分析、微積分和高等數學教科書時, 用這個減弱的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L' Hospital 法則。

参考文獻

1. L. Salas Saturnino, Einar Hille Calculus 2[M], Xero College Publishing USA, 1971:476.
2. 華東師範大學數學系, 數學分析 (上) [M], 北京: 高等教育出版社, 2001: 128-129, 237。
3. 江澤堅, 數學分析 [M], 北京: 人民教育出版社, 1978。
4. 趙樹嫄, 微積分 (第2版) [M], 北京: 中國人民大學出版社, 1993。
5. 田根寶等, 高等數學 (第2版) [M], 上海: 上海科技出版社, 1993。
6. 孫本旺等, 數學分析中的典型例題和解題方法 [M], 長沙: 湖南科技出版社, 1981: 223-224。
7. 鄭英元等, 數學分析習題課教程 (上) [M], 北京: 高等教育出版社, 1991: 96-97。
8. 吳良森等, 數學分析習題精解 (單變數部分) [M], 北京: 科學出版社, 2002年2月, 116-117, 123 頁。
9. 鄒節銑等, 1978-1983年全國招考研究生高等數學試題選解 [M], 長沙: 湖南科技出版社。
10. 黃定暉、周學聖編演, 郭大鈞、邵品琮主審, B. II. 吉米多維奇著, 數學分析習題集解 (三) [M], 濟南: 山東科技出版社, 1979: 490-493。

—本文作者任教安徽省阜陽師範學院數學系—