聯考題目為何送分?

張海潮

八十六年七月聯考社會組數學有一題填充題:

設方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四個相異有理根, 則其最大根爲_______。

這題由於沒有事先假設 b, c 是整數, 結果答案變得似乎無法確定, 所以後來考試試務方面決定全國一律給分。

如果先設它是整係數方程式, 那麼有理根就一定是整數根, 根據題意, 這四根的和是 -3, 乘積是 10, 所以應該是 -1, 1, 2, -5。

現在, 由於不說 b, c 是整數, 但是知道根是有理數, 所以當然, b, c 也自然是有理數, 並且可以是任意的, 只要根是相異的有理數就好, 因此問題就等同於

四個相異的有理數, 和是 -3, 積是 10, 四個之中的最大可能是多少?

爲了符號上的方便, 假設這四個相異的有理數是 x, y, z, u
因此

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= -3 \\ xyzu &= 10 \end{aligned}$$

把 x 以 $-x$, y 以 $-y$, z 以 $-z$, u 以 $-u$ 代入, 方程式變成 (註一)

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= 3 \\ xyzu &= 10 \end{aligned}$$

令 $3-u=p$

$$\begin{aligned} & x+y+z=p \\ & xyz=10/u=10/(3-p) \end{aligned}$$

由於 $z=p-x-y$, 因此得到

$$xy(p-x-y)=10/(3-p)$$

$$\text{或}\qquad xy(x+y)-pxy+10/(3-p)=0 \tag{1}$$

(1) 式可說是換湯不換藥, 求 (1) 式的通解是很困難的, 因爲消分母以後

$$(3-p)xy(x+y)-(3-p)pxy+10=0. \tag{2}$$

這是一個三個變數的整數係數方程, 要求有理根本是數論上的大問題 (註二)。所以我們偷個巧, 令 $x+y=0$ (註三)。(2) 式變成

$$-(3-p)pxy+10=0, \quad y=-x$$

$$\text{得}\qquad p^2x^2-3px^2-10=0 \tag{3}$$

如果判別式 $(3x^2)^2+40x^2$ 是有理數的完全平方, (3) 式中的 p 就是有理數, 因爲 $(3x^2)^2+40x^2=x^2[9x^2+40]$, 所以希望 $9x^2+40=l^2$, l 是有理數。

亦即

$$l^2-9x^2=40 \quad \text{或} \quad (l-3x)(l+3x)=40 \tag{4}$$

令 $l-3x=\alpha$, $l+3x=\beta$, (4) 式變成

$$\begin{aligned} x&=\frac{\beta-\alpha}{6}\\ 40&=\alpha\beta \end{aligned} \tag{5}$$

接句話說, 求一部份解的步驟是

(A) 把 40 拆成 α、β

(B) 令 $x=\frac{\beta-\alpha}{6}$

(C) 令 $y=-x$

(D) 解 $p^2x^2-3px^2-10=0$

(E) 令 $z=p$

(F) 令 $u=3-z$

(G) $-x$, $-y$, $-z$, $-u$ 即爲原方程式之解

例 1. 令 $\alpha=4$, $\beta=10$, 得 $x=1$, $y=-1$, $z=p=\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2}=5$ 或 -2, $u=-2$ 或 5。

例 2. $\alpha = 2$, $\beta = 20$ 得 $x = 3$, $y = -3$, $z = p = \frac{10}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$, $u = -\frac{1}{3}$ 或 $\frac{10}{3}$。

例 3. $\alpha = 1$, $\beta = 40$ 得 $x = \frac{13}{2}$, $y = -\frac{13}{2}$, $z = p = \frac{40}{13}$ 或 $-\frac{1}{13}$, $u = -\frac{1}{13}$ 或 $\frac{40}{13}$。

注意到 α 可以是很小很小的有理數, 因此可能的解 x 或 y 的絕對值是可以很大的 (註四)。

註一. 只是符號上簡化, 沒有特別的意義。

註二. 數論/代數幾何的用語是“求佈於有理數的代數曲體上的有理點”。

註三. 只求一部份的解。

註四. 有高中老師問起, 怎樣告訴學生這個題目眞正的難度在那裡, 所以引發我去想這個問題, 我只能給一點部份的回答。

—本文作者曾任教於臺灣大學數學系, 現已退休—