生成函數與投信問題的解

文耀光 · 潘建強

1. 引言

「如果將 8 封不同的信件隨機地投入 4 個不相同的郵筒中, 而每個郵筒都至少要投入一封, 究竟有多少種不同的投法呢?」

這是一個頗有趣的組合問題, 不妨稱之爲「投信問題」。有關它的解法有很多種, 本文會介紹如何應用「生成函數」(Generating Functions) 的方法, 去尋求此問題的解。

2. 生成函數的定義

定義: 設 $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots\}$ 爲一數列。
以下的無窮級數定義爲 $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots\}$ 的「生成函數」:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_r z^r + \cdots.$$

例一: 對數列 $\{3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^r, \ldots\}$ 而言, 其生成函數是:

$$f(z) = 3^0 + 3^1 z + 3^2 z^2 + \cdots + 3^r z^r + \cdots.$$

若以閉式 (closed form) 表示, $f(z) = \frac{1}{1-3z}$。

例二: 設 $n \in Z^+$。由於 $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$,
所以 $\{C_0^n, C_1^n, C_2^n, \ldots, C_r^n, 0, 0, \ldots\}$ 的生成函數是 $(1+x)^n$。

例三: 設 $n \in Z^+$。
當 $r > 0$ 時, 定義 $\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}$。
當 $r = 0$ 時, 定義 $\binom{-n}{0} = 1$。
由於 $(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r$

所以 $\left\{\binom{-n}{0},\binom{-n}{1},\binom{-n}{2},\ldots\right\}$ 的生成函數是 $(1+x)^{-n}$。

定義: 設 $\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_r,\ldots\}$ 為一數列。
以下的無窮級數定義為 $\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_r,\ldots\}$ 的「指數生成函數」:

$$f(z)=a_0+a_1z+\frac{a_2z^2}{2!}+\frac{a_3z^3}{3!}\cdots+\frac{a_rz^r}{r!}+\cdots.$$

例四: 設 $n\in Z^+$。

由於
$$\begin{aligned}(1+x)^n&=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n\\&=P_0^n+P_1^nx+\frac{P_2^nx^2}{2!}+\cdots+\frac{P_n^nx^n}{n!}\end{aligned}$$

所以 $\{P_0^n,P_1^n,P_2^n,\ldots,P_r^n,0,0,\ldots\}$ 的指數生成函數是 $(1+x)^n$。

3. 應用例子

本節是一個有關指數生成函數的應用例子。相對於列舉法而言, 我們可以看到應用生成函數去求解, 是一個十分簡便而有效的解題方法。

例五: 若在英文字 ENGINE 中任意選取4個字母作排列, 有多少種不同的方式?

解: (列舉法)

選取的字母	排列數目	選取的字母	排列數目
{E,E,N,N}	$\frac{4!}{2!2!}$	{E,G,N,N}	$\frac{4!}{2!}$
{E,E,G,N}	$\frac{4!}{2!}$	{E,I,N,N}	$\frac{4!}{2!}$
{E,E,I,N}	$\frac{4!}{2!}$	{G,I,N,N}	$\frac{4!}{2!}$
{E,E,G,I}	$\frac{4!}{2!}$	{E,I,G,N}	$4!$

因此有 $\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}\times 6+4!=102$ 種的排列方式。

解: (生成函數方法) 先考慮每個字母可能被選中的個數。E 和 N 的可能數目都是 0, 1或 2, 而 G 和 I 的可能數目都是 0或1。因此, 對 E 和 N 而言, 它們的指數生成函數是 $(1+x+\frac{x^2}{2!})$, 而對 G 和 I 而言, 它們的指數生成函數是 $(1+x)$。現在考慮以下的函數:

$$f(x)=\overbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)}^{\mathrm{E}}\overbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)}^{\mathrm{N}}\overbrace{(1+x)}^{\mathrm{G}}\overbrace{(1+x)}^{\mathrm{I}}.$$

若我們在括號 E, N, G 和 I 中分別選取 $\frac{x^2}{2!}$, $\frac{x^2}{2!}$, 1及1, 則有:

$$\frac{x^2}{2!}\times\frac{x^2}{2!}\times 1\times 1=\frac{x^4}{2!2!}=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{x^4}{4!}\right)$$

此時 $\frac{x^4}{4!}$ 的係數是 $\frac{4!}{2!2!}$, 正好等於在 ENGINE 中選取2個 E 及2個 N, 而沒有選取 G 或 I 的情況。由此推論, 原問題的解即是 $f(x)$ 展開後 $\frac{x^4}{4!}$ 之係數。沿此思路, 容易求得其解是102。

註: 有時可以利用 e^x 或 e^{-x} 來表示一些指數生成函數的閉式。例如:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

或

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots$$

4. 投信問題的解

現在讓我們展示如何應用生成函數的方法, 去尋求投信問題的解。

設 A, B, C 和 D 分別代表該4個郵筒。由於每個郵筒所投入的信件數目必大於0, 仿照上節的思路方式, 可考慮其對應的指數生成函數 $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$。然後考慮以下的函數:

$$f(x)=\overbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}^{\text{A}}\overbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}^{\text{B}}\overbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}^{\text{C}}\overbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}^{\text{D}}.$$

若投入郵筒 A, B, C, D 的信件數目分別是 1, 2, 2, 3, 則在 A 式中選取 x, 在 B 和 C 式中都選取 $\frac{x^2}{2!}$, 在 D 式中選取 $\frac{x^3}{3!}$, 則 $\frac{x^8}{8!}$ 的係數正好反映此種情況之投法數目。即:

$$x\times\frac{x^2}{2!}\times\frac{x^2}{2!}\times\frac{x^3}{3!}=\left(\frac{8!}{2!2!3!}\right)\left(\frac{x^8}{8!}\right).$$

當然, 其他的可能情況, 亦可以用類似的方法處理。

爲了方便計算, 我們可以把 $f(x)$ 記成:

$$\begin{aligned}f(x)&=(e^x-1)^4\\&=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1,\end{aligned}$$

此時, 容易獲得 $\frac{x^8}{8!}$ 的係數爲 $4^8-4(3)^8+6(2)^8-4=40824$。換言之, 不同的投信方式共有40824種。

5. 總結

生成函數方法是一個解決排列和組合問題的有效工具, 而且可以適應同類型問題的各種變化情況。例如, 若要投8封不同的信入4個郵筒, 要求在第1和第2個郵筒中至少要投入1封, 在第3個郵筒中最多投入5封, 而在第4個郵筒中要投入偶數封, 有多少種不同的投法呢? [1] 若採用生成函數的方法求解, 會很容易算出結果, 比使用列舉法簡單得多, 有興趣的讀者不妨動手一試。

參考書目

1. 黃振杰 (2000)。「離散數學」。廈門: 廈門大學出版社。
2. Grimaldi, Ralph P. (1994). Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction (3rd edition). Addison-Wesley Press.

—本文作者任教於香港教育學院數學系—

[1] 提示: 考慮以下的展開式 $(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^8}{8!})^2\times(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})\times(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!})$, 然後求 $\frac{x^8}{8!}$ 的係數, 答案是20412。