組合計數的方法兩則

李政豐

一. 前言

好幾次與高中數學老師, 談到二年級下學期的「排列組合教學」, 彼此共同的感覺都是: 學生在接觸到『不盡相異物排列』、『重複排列』、『重複組合』的時候, 學習的困難就已經開始呈現, 當老師要把這些方法應用到 Laplace 古典機率定義的時候, 更大的教學障礙產生了: 學了那麼多種排列組合的方法, 學生卻沒有信心踏出第一步, 縱然有少部分學生能勇敢的按照自己的想法, 把題目解完, 卻也沒有太大的把握它是對的。會有這種情況發生, 我感覺是因爲排列組合與機率的教學, 當計算的數目比較大時, 不太容易分析與實驗, 在學生的腦海裡缺少具體淸楚的形象, 於是過去解題的經驗能牢記在心的的機會不多, 加上參考書中琳瑯滿目的試題, 一個問題一種對策, 把孩子們的思緒搞亂了, 重點在哪裡? 錯在什麼地方, 學生實在抓不住。於是「排列組合與機率」, 變成是高中學生心中的『最痛』, 許多任教國文、英文、社會科的老師, 回憶起高中生涯, 也有相同的感覺。會造成這種局面, 我感覺與高中數學的課程內容, 比較缺乏組合計數方法的例題有關, 要改善這種情況, 就有待高中數學課程標準的修訂委員, 多在這裡傷點腦筋了。下面舉兩個實例, 用實驗、分析的策略, 來說明組合計數的方法, 在高中排列組合與機率的應用。

二. 本文

我們先看看有關組合計數的兩個問題。

問題 1: 不大於30而與30互質的自然數有幾個?

這個問題是衆所週知的 Euler ϕ 函數, 它的解答是

$$30\times\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\times\Big(1-\frac{1}{3}\Big)\times\Big(1-\frac{1}{5}\Big)=8.$$

如果我們直觀的從解答去考量: 30的標準分解式爲 $2\times3\times5$。

(A) $30\times(1-\frac{1}{2})=15$, 代表兩個連續自然數中有一個是偶數, 它與30不互質, 必須捨去, 於是剩下15個奇數;

$$\{1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29\}$$

(B) 如果把15個奇數, 按順序三個三個分一組, 共可分成五組

$$\{1、3、5\}, \{7、9、11\}, \{13、15、17\}, \{19、21、23\}, \{25、27、29\}$$

$30\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})=10$, 代表每一組當中, 3個連續奇數, 必有一個是3的倍數, 它出現在每一組的最中間, 它與30不互質, 也必須捨去, 於是剩下與2、3皆互質的10個數, $\{1、5、7、11、13、17、19、23、25、29\}$。

(C) 如果我們把它按順序五個五個分一組, 共可分成兩組

$$\{1、5、7、11、13\}, \{17、19、23、25、29\}$$

$30\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{5})=8$, 代表每一組當中, 5個數中必有一個是5的倍數, 它與30不互質, 也必須捨去, 故剩下8個數, 但是它出現的順序亂掉了, 第一組出現在第二個, 第二組出現在第四個。

到底是什麼因素決定它出現的順序? 幕後的黑手是誰?

如果我們由集合的觀點去考量:

令 S 代表由1到30的自然數所成的集合, $n(S)$ 代表集合 S 的元素個數。

$$X=\{n|1\leq n\leq 30,\ 2|n\}$$
$$Y=\{n|1\leq n\leq 30,\ 3|n\}$$
$$Z=\{n|1\leq n\leq 30,\ 5|n\}$$

X'、Y'、Z' 分別代表 X、Y、Z 的補集合。

則由狄摩根定律 (DeMorgan's law)

$$n(X'\cap Y'\cap Z')=n[(X\cup Y\cup Z)']=n(S)-n(X\cup Y\cup Z)$$

就是代表不大於30而與30互質的自然數的個數。

由排容原理;

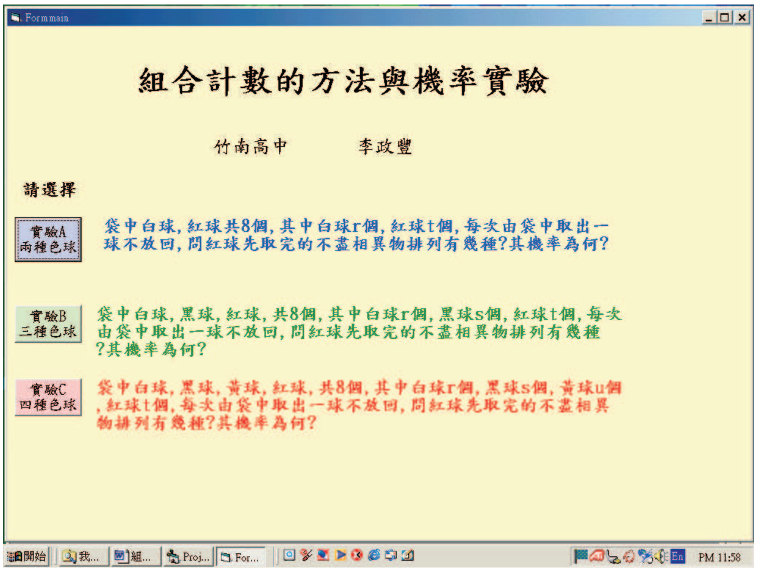
$$\begin{aligned}n(X\cup Y\cup Z)=&\,n(X)+n(Y)+n(Z)-(n(X\cap Y)+n(X\cap Z)+n(Y\cap Z))\\&+n(X\cap Y\cap Z)\end{aligned}$$

故
$$
\begin{aligned}
n(X'\cap Y'\cap Z') &= n(S)-n(X\cup Y\cup Z)\\
&= n(S)-n(X)-n(Y)-n(Z)+n(X\cap Y)+n(X\cap Z)+n(Y\cap Z)-n(X\cap Y\cap Z)\\
&= 30-15-10-6+5+3+2-1\\
&= 30\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{30}\right)\\
&= 30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)
\end{aligned}
$$

我們儼然看出幕後的黑手是誰, 原來它就是排容原理與狄摩根定律。縱然把題目改成『不大於49而與30互質的自然數有幾個?』, 只用排容原理與狄摩根定律也容易算出來。

問題 2: 白球2個, 黑球2個, 黃球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?

這個問題看來眼熟, 卻是難度頗高, 如果規定要寫出解法才算數, 我想絕大部分的高中學生都解不出來。我們不妨先把球的顏色與數目減少, 試試看如何掌握它的計數法則。以下兩題是在高中數學參考書、學校自編題庫、與高三模擬考試中常見的問題, 可惜每次碰到都是停留在原始的階段, 三、四年來, 沒有看到進一步用組合計數的方法去研究與探討, 我個人覺得很可惜。我一直想藉由實驗探索式的學習, 引導我的學生, 用玩遊戲的方式, 來研究這個組合計數的問題。於是用 VB 設計了幾個程式, 實際上用亂數做做看!



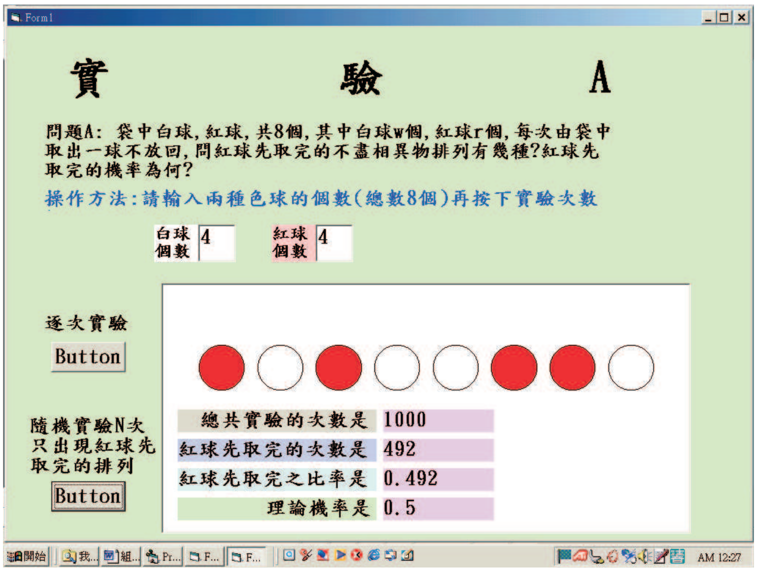
引導問題 2-1: 白球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?

解: 若要考慮紅球先取完, 則取球的最後一個必定是白球, 如果從球的顏色來區分, 考慮不盡相異物排列數, 那就有:

$$(紅, 紅, 白, 白), (紅, 白, 紅, 白), (白, 紅, 紅, 白)\ 三種$$

故所求機率爲 $p = \frac{\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}\times(2!)\times(2!)}{4!} = \frac{1}{2}$。

程式執行的結果如下, 如果學生夠仔細, 會發現最後出現的一定是白球。



如果把問題改爲:

『白球 w 個, 紅球 r 個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?』, 仿照上面的解法, 我們也不難求得機率爲

$$p = \frac{\frac{(w-1+r)!}{(w-1)!r!}\times w!\times r!}{(w+r)!} = \frac{\frac{(w-1+r)!}{(w-1)!r!}}{\frac{(w+r)!}{w!r!}} = \frac{w}{w+r}.$$

這個解答很簡單、直觀、也很合理;

當白球的個數增多了, 亦即當自然數 $w_1 > w_2 \geq 1$ 時, $\frac{w_1}{w_1+r} > \frac{w_2}{w_2+r}$ (用相減會大於0, 就可證出來), 紅球先取完的機率就變大了。

當紅球的個數增多了, 亦即當自然數 $r_1 > r_2 \geq 1$ 時, $\frac{w}{w+r_1} < \frac{w}{w+r_2}$, 紅球先取完的機率就變小了。

引導問題 2-2: 白球2個, 黑球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?

解: 剛開始, 我們當然是先作實驗排排看, 到底哪些是符合條件的不盡相異物排列,

(紅, 紅, 黑, 黑, 白, 白), (紅, 白, 紅, 黑, 黑, 白),
(紅, 黑, 白, 紅, 白, 黑),... 等,

都算是「紅球先取完的不盡相異物排列」。

有了具體的概念後, 才考慮分類, 嘗試用加法原理來計算: 例如: 將紅球的位置排在第一第二、第一第三、第一第四、第二第三、第二第四第三第四, 共六類, 再把2個白球2個黑球安插進去, 務必使得它滿足紅球先取完的要求條件。可是當球數增多了, 不僅僅分類不容易, 連安插進去使得紅球先取完的方法也不簡單, 而且像本題, 所有的不盡相異物排列數已經有 $\frac{6!}{2!2!2!}=90$ 種, 我們只用加法原理, 很難一個一個的去檢驗, 哪些是符合條件的不盡相異物排列? 因此這個方法就變成複雜、麻煩又毫無頭緒, 於是這個分類計數的方法又不靈光了, 到底是什麼因素決定它的計數法則? 眞正的幕後黑手又是誰? 百思不得一解。山窮水盡疑無路, 柳暗花明又一村。我們不禁又聯想到『排容原理與狄摩根定律』, 這兩個經常幫我們化混沌爲明朗的工具。

爲了使計算式子變得簡單, 我們想定義一些集合與函數;

令 X 代表紅球比白球先取完的不盡相異物排列所成的集合 (不管黑球的順序)。
Y 代表紅球比黑球先取完的不盡相異物排列所成的集合 (不管白球的順序)。

則 $X\cap Y$ 代表紅球比黑球、白球都先取完的不盡相異物排列所成的集合。$X\cup Y$ 代表 (紅球比黑球先取完) 或 (紅球比白球先取完) 的不盡相異物排列所成的集合。

定義函數;

$F(2W,2B,2R;R)$爲: 2個白球 $(2W)$, 2個黑球 $(2B)$, 2個紅球 $(2R)$, 全部放在一個袋子中, 每次從中任取一球不放回, 將所取出的球, 依序排成一列, 其中紅球先取完的不盡相異物排列個數。

其實, 在只有三種色球時, $n(X\cap Y)=F(2W,2B,2R;R)$, 就是我們要計算的目標, 但是 X、Y、$X\cup Y$, 卻是讓我們很難具體實驗操作, 不易理解的集合。

$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y) \tag{A}$$

[甲] $n(X)$ 要如何計算?

X 代表紅球比白球先取完的不盡相異物排列所成的集合 (不管黑球的位置及黑球與其他色球的相關順序)。

(1) 如果只考慮「白球2個, 紅球2個, 紅球比白球先取完的不盡相異物排列」, 由於最後所取的一定是白球, 則有 $\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}=3$ 種不盡相異物排列的方法。

(2) 如果將上面的每一種方法, 把兩個黑球安插進去, 則有 $\frac{6!}{4!2!}$ 種方法, 例如

(紅, 紅, 白, 白, 黑, 黑), (紅, 紅, 白, 黑, 白, 黑),
(紅, 黑, 紅, 白, 白, 黑), (紅, 黑, 黑, 紅, 白, 白),... 等等。

不論兩黑球安插在哪個位置, (紅, 紅, 白, 白) 的順序是固定的, 只有一種, 因此分母要除以 4!。

(3) $n(X)=\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}\times\frac{6!}{4!2!}=45$, 同理可得 $n(Y)=45$。

[乙] $n(X\cup Y)$ 要如何計算?

$X\cup Y$ 代表 (紅球比黑球先取完) 或 (紅球比白球先取完) 的不盡相異物排列所成的集合。當球數增多的時候, $n(X\cup Y)$ 實在難以計算。正面不易, 我就由反面來想; $(X\cup Y)'=X'\cap Y'$, 代表 (黑球比紅球先取完) 且 (白球比紅球先取完), 亦即最後一個取完的一定是紅球, 這下子就簡單多了。

$$\begin{aligned} n(X\cup Y) &= (\text{所有不盡相異物排列數})-n[(X\cup Y)'] \\ &= (\text{所有不盡相異物排列數})-n(X'\cap Y') \\ &= \frac{6!}{2!2!2!}-\frac{(2+2+(2-1))!}{2!2!(2-1)!} \end{aligned}$$

把甲、乙的結果代入 (A) 式,

$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$$
$$\frac{6!}{2!2!2!}-\frac{(2+2+(2-1))!}{2!2!(2-1)!}=\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}\times\frac{6!}{4!2!}+\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}\times\frac{6!}{4!2!}-n(X\cap Y)$$

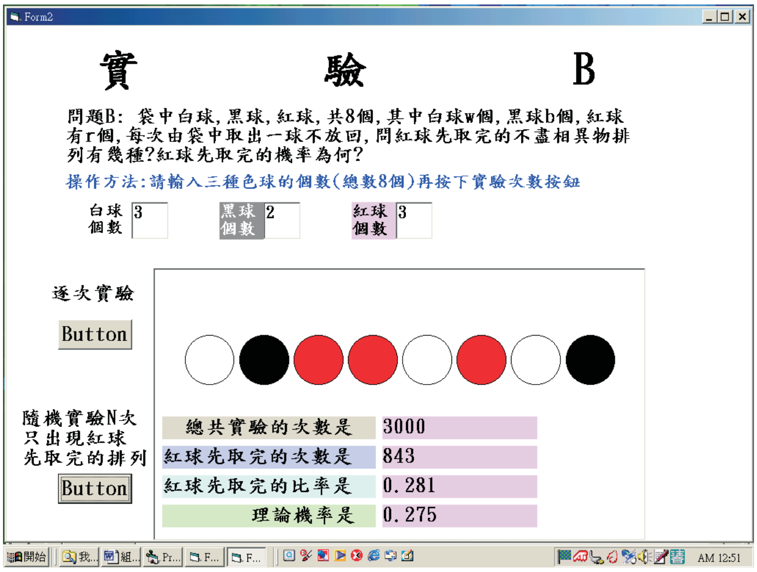
得到 $n(X\cap Y)=45+45-90+30=30$。

亦即, 先前所定義的函數 $F(2W,2B,2R;R)=n(X\cap Y)=30$。

因此引導問題 (2-2) 的機率 $p=\frac{30\times 2!\times 2!\times 2!}{6!}=\frac{1}{3}$。

這也很合理, 各色球數相同, 所以佔 $\frac{1}{3}$。

程式執行的結果如下



我們想把上面甲、乙、丙的結果作一般化, 把問題改爲:

『白球 w 個, 黑球 b 個, 紅球 r 個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少? 』

解: 我們可仿照前面組合計數的方法來計算紅球先取完的不盡相異物排列數。

$$n(X\cap Y)=F(wW,bB,rR;R)$$
$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$$
$$(\text{所有不盡相異物排列數}-n(X'\cap Y'))=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$$
$$n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-\ (\text{所有不盡相異物排列數}-n(X'\cap Y'))$$

$$\begin{aligned}&F(wW,bB,rR;R)\\=&\frac{(w-1+r)!}{(w-1)!r!}\times\frac{(w+b+r)!}{(w+r)!b!}+\frac{(b-1+r)!}{(b-1)!r!}\times\frac{(w+b+r)!}{(b+r)!w!}\\&-\Big(\frac{(w+b+r)!}{w!b!r!}-\frac{(w+b+(r-1))!}{w!b!(r-1)!}\Big)\\=&\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)\times\frac{(w+b+r)!}{w!b!r!}\end{aligned}\tag{B}$$

再計算紅球先取完的機率

$$p=\frac{F(wW,bB,rR;R)\cdot w!\cdot b!\cdot r!}{(w+b+r)!}=\frac{F(wW,bB,rR;R)}{\frac{(w+b+r)!}{w!b!r!}}$$

化簡之得到 $p=-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+r(\frac{1}{w+b+r})$。

如果利用移項, 換一下它們的位置

$$1-\frac{r}{w+b+r}=\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}-p$$

這個結果, 雖不像問題 (2-1)、(2-2) 的結果, 那麼容易解讀, 但是隱隱約約的可以看出『等號右邊是排容原理, 等號左邊是狄摩根定律』, 可見這兩隻幕後黑手的影響力有多大。

回歸主題

問題 2: 白球2個, 黑球2個, 黃球2個, 紅球2個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 問紅球先取完的機率是多少?

解: 令

X : 紅球比白球先取完之不盡相異物排列所成的集合

Y : 紅球比黑球先取完之不盡相異物排列所成的集合

Z : 紅球比黃球先取完之不盡相異物排列所成的集合

則

$X\cap Y$: 紅球比白球、黑球都先取完之不盡相異物排列所成的集合,

$X\cap Z$: 紅球比白球、黃球都先取完之不盡相異物排列所成的集合,

$Y\cap Z$: 紅球比黑球、黃球都先取完之不盡相異物排列所成的集合,

$X\cap Y\cap Z$: 紅球比白球、黑球、黃球都先取完之不盡相異物排列所成的集合

$X\cup Y\cup Z$: (紅球比白球先取完) 或 (紅球比黑球先取完) 或 (紅球比黃球先取完) 之不盡相異物排列所成的集合

由
$$n(X\cup Y\cup Z)=n(X)+n(Y)+n(Z)-(n(X\cap Y)+n(X\cap Z)+n(Y\cap Z)) +n(X\cap Y\cap Z)$$

(1) $n(X)=n(Y)=n(Z)=\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}\times\frac{(2+2+2+2)!}{(2+2)!2!2!}=1260$。

其中 $\frac{(2-1+2)!}{(2-1)!2!}$ 代表: 白球2個紅球2個, 一次取一球, 紅球先取完之不盡相異物排列數。

$\frac{(2+2+2+2)!}{(2+2)!2!2!}$ 代表: 針對上面的每一種排列順序, 要把黑球2個、黃球2個安插進去的方法數。

由 (B) 式

$$F(wW,bB,rR;R)=\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)\times\frac{(w+b+r)!}{w!b!r!}$$

但是, 當有四種色球的時候;

(2) $n(X \cap Y) = F(wW, bB, rR; R) \times \frac{(2+2+2+2)}{(2+2+2)!2!} = 30 \times 28 = 840$。
其中, $F(wW, bB, rR; R)$ 代表: 恰有白球2個、黑球2個、紅球2個的時候, 每次取一球, 紅球先取完的不盡相異物排列數。
$\frac{(2+2+2+2)}{(2+2+2)!2!}$: 代表針對上面的每一種排列順序, 要把黃球2個, 安插進去的方法數。

(3)
$$\begin{aligned} n(X \cup Y \cup Z) &= \text{所有不盡相異物排列數} - n(X' \cap Y' \cap Z') \\ &= \frac{(2+2+2+2)!}{2!2!2!2!} - \frac{(2+2+2+2-1)!}{2!2!2!(2-1)!} = 2520 - 630 = 1890\text{。} \end{aligned}$$

其中 $\frac{(2+2+2+2-1)!}{2!2!2!(2-1)!}$ 代表最後一個是紅球的不盡相異物排列數。
把 (1) (2) (3) 的值, 代入排容原理

$$\begin{aligned} n(X \cup Y \cup Z) &= n(X) + n(Y) + n(Z) - (n(X \cap Y) + n(X \cap Z) + n(Y \cap Z)) \\ &\quad + n(X \cap Y \cap Z) \\ 1890 &= 1260 + 1260 + 1260 - (840 + 840 + 840) + n(X \cap Y \cap Z) \end{aligned}$$

得 $n(X \cap Y \cap Z) = 630$, 同時也得到另一個函數值 $F(2W, 2B, 2Y, 2R; R) = 630$。$F(2W, 2B, 2Y, 2R; R)$ 代表恰有2個白球、2個黑球、2個黃球、2個紅球時, 每次取出一球不放回, 其中紅球先取完的不盡相異物排列數。
於是問題 (2) 的答案: $p = \frac{630 \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!}{8!} = \frac{1}{4}$, 這個答案也十分合理。
程式執行結果如下

三. 四種色球的一般化的結果

問題: 白球 w 個, 黑球 b 個, 黃球 y 個, 紅球 r 個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球, 紅球先取完的機率是多少?

解: 分別令

X爲紅球比白球先取完之不盡相異物排列所成的集合,
Y爲紅球比黑球先取完之不盡相異物排列所成的集合,
Z爲紅球比黃球先取完之不盡相異物排列所成的集合。

則

$X\cap Y$: 紅球比白球、黑球都先取完之不盡相異物排列所成的集合
$X\cap Z$: 紅球比白球、黃球都先取完之不盡相異物排列所成的集合
$Y\cap Z$: 紅球比黑球、黃球都先取完之不盡相異物排列所成的集合
$X\cap Y\cap Z$: 紅球比白球、黑球、黃球都先取完之不盡相異物排列所成的集合
$X\cup Y\cup Z$: (紅球比白球先取完) 或 (紅球比黑球先取完) 或 (紅球比黃球先取完) 之不盡相異物排列所成的集合

在恰有四種色球時, 令 p 爲所求機率, 則

$$p\cdot\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}=F(wW,bB,yY,rR,R)=n(X\cap Y\cap Z),$$

$$\begin{aligned}n(X\cup Y\cup Z)&=n(X)+n(Y)+n(Z)-(n(X\cap Y)+n(X\cap Z)+n(Y\cap Z))\\&\quad+n(X\cap Y\cap Z)\end{aligned}\tag{C}$$

$$n(X)=\frac{(w-1+r)!}{(w-1)!r!}\times\frac{(w+b+y+r)!}{(w+r)!b!y!}=\frac{w}{w+r}\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}$$
$$n(Y)=\frac{(b-1+r)!}{(b-1)!r!}\times\frac{(w+b+y+r)!}{(b+r)!w!y!}=\frac{b}{b+r}\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}$$
$$n(Z)=\frac{(y-1+r)!}{(y-1)!r!}\times\frac{(w+b+y+r)!}{(y+r)!w!b!}=\frac{y}{y+r}\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}$$

由 (B) 式

$$F(wW,bB,rR;R)=\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)\times\frac{(w+b+r)!}{w!b!r!}$$

在有四種色球的時候

$$\begin{aligned}
n(X\cap Y) &= F(wW,bB,rR;R)\times\frac{(w+b+y+r)!}{(w+b+r)!y!}\\
&= \Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\\
F(wW,yY,rR;R) &= \Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\Big)\times\frac{(w+y+r)!}{w!y!r!}\\
n(X\cap Z) &= F(wW,yY,rR;R)\times\frac{(w+b+y+r)!}{(w+y+r)!b!}\\
&= \Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\\
F(bB,yY,rR;R) &= \Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\Big)\times\frac{(b+y+r)!}{b!y!r!}\\
n(Y\cap Z) &= F(bB,yY,rR;R)\times\frac{(w+b+y+r)!}{(b+y+r)!w!}\\
&= \Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\\
n(X\cup Y\cup Z) &= \text{所有不盡相異物排列數} - n(X'\cap Y'\cap Z')\\
&= \frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}-\frac{(w+b+y+r-1)!}{w!b!y!(r-1)!}\\
&= \Big(1-\frac{r}{w+b+y+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&n(X\cap Y\cap Z)\\
&= n(X\cup Y\cup Z)-(n(X)+n(Y)+n(Z))+(n(X\cap Y)+(X\cap Z)+n(Y\cap Z))\\
&= \Big(1-\frac{r}{w+b+y+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\\
&\quad -\Big(\frac{w}{w+r}\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}+\frac{b}{b+r}\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}+\frac{y}{y+r}\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\Big)\\
&\quad +\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\\
&\quad +\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\\
&\quad +\Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\Big)\times\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}.
\end{aligned}$$

所求機率為 $p=\frac{n(X\cap Y\cap Z)}{\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}}$.

即 $P=\Big(1-\dfrac{r}{w+b+y+r}\Big)-\Big(\dfrac{w}{w+r}+\dfrac{b}{b+r}+\dfrac{y}{y+r}\Big)$
$$+\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)+\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\Big)$$
$$+\Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\Big),$$

移項後,

$$\Big(1-\frac{r}{w+b+y+r}\Big)$$
$$=\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}-\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)$$
$$-\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\Big)-\Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\Big)+P$$

等號左邊看得見「狄摩根定律」, 等號右邊是「雙重的狄摩根定律與排容原理」, 在操縱著它的結構。若將上式化簡, 則得到

$$p=-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+r\Big(\frac{1}{w+b+r}+\frac{1}{w+y+r}+\frac{1}{b+y+r}\Big)$$
$$-r\Big(\frac{1}{w+b+y+r}\Big).$$

四. 五種色球的一般化的結果

問題: 白球 w 個, 黑球 b 個, 黃球 y 個, 綠球 g 個, 紅球 r 個, 全部放在一個袋子中, 每次從中取一球不放回, 紅球先取完的機率是多少?

分別令

X爲紅球比白球先取完之不盡相異物排列所成的集合,
Y爲紅球比黑球先取完之不盡相異物排列所成的集合,
Z爲紅球比黃球先取完之不盡相異物排列所成的集合,
U爲紅球比綠球先取完之不盡相異物排列所成的集合。

則 $n(X\cup Y\cup Z\cup U)$
$$=(n(X)+n(Y)+n(Z)+n(U))$$
$$-(n(X\cap Y)+n(X\cap Z)+n(X\cap U)+n(Y\cap Z)+n(Y\cap U)+n(Z\cap U))$$
$$+(n(X\cap Y\cap Z)+n(X\cap Y\cap U)+n(X\cap Z\cap U)+n(Y\cap Z\cap U))$$
$$-n(X\cap Y\cap Z\cap U)$$

其中

$$\begin{aligned} n(X\cup Y\cup Z\cup U) &= \text{全部不盡相異物排列} - n(X'\cap Y'\cap Z'\cap U') \\ &= \frac{(w+b+y+g+r)!}{w!b!y!g!r!} - \frac{(w+b+y+g+r-1)!}{w!b!y!g!(r-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(X) &= \frac{(r+w-1)!}{r!(w-1)!}\cdot\frac{(w+b+y+g+r)!}{(r+w)!b!y!g!} \\ n(X\cap Y) &= \Big[\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big)\times\frac{(w+b+r)!}{w!b!r!}\Big]\times\frac{(w+b+y+g+r)!}{(w+b+r)!y!g!} \\ n(X\cap Y\cap Z) &= \Big(-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+b+r}+\frac{r}{w+y+r}+\frac{r}{b+y+r} \\ &\quad -\frac{r}{w+b+y+r}\Big)\cdot\Big(\frac{(w+b+y+r)!}{w!b!y!r!}\Big)\cdot\frac{(w+b+y+g+r)!}{(w+b+y+r)!g!} \end{aligned}$$

其他的集合元素個數, 仿照上面四列的式子代入排容原理之後, 再提出共同因式

$$\begin{aligned} &\Big(1-\frac{r}{w+b+y+g+r}\Big)\Big(\frac{(w+b+y+g+r)!}{w!b!y!g!r!}\Big) \\ =&\Big[\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}-\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\Big) \\ &-\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\Big)-\Big(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{g}{g+r}+\frac{r}{w+g+r}\Big) \\ &-\Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\Big)-\Big(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{g}{g+r}+\frac{r}{b+g+r}\Big) \\ &-\Big(-1+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}+\frac{r}{y+g+r}\Big) \\ &+\Big(-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+b+r}+\frac{r}{w+y+r}+\frac{r}{b+y+r}-\frac{r}{w+b+y+r}\Big) \\ &+\Big(-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{g}{g+r}+\frac{r}{w+b+r}+\frac{r}{w+g+r}+\frac{r}{b+g+r}-\frac{r}{w+b+g+r}\Big) \\ &+\Big(-2+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}+\frac{r}{w+y+r}+\frac{r}{w+g+r}+\frac{r}{y+g+r}-\frac{r}{w+y+g+r}\Big) \\ &+\Big(-2+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}+\frac{r}{b+y+r}+\frac{r}{b+g+r}+\frac{r}{y+g+r}-\frac{r}{b+y+g+r}\Big)\Big] \\ &\times\Big(\frac{(w+b+y+g+r)!}{w!b!y!g!r!}\Big)-n(X\cap Y\cap Z\cap U). \end{aligned}$$

移項整理, 得

$$
\begin{aligned}
&n(X\cap Y\cap Z\cap U)\\
=&\Big[-3+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}\\
&+r\Big(\frac{1}{w+b+r}+\frac{1}{w+y+r}+\frac{1}{w+g+r}+\frac{1}{b+y+r}+\frac{1}{b+g+r}+\frac{1}{y+g+r}\Big)\\
&-r\Big(\frac{1}{w+b+y+r}+\frac{1}{w+b+g+r}+\frac{1}{w+y+g+r}+\frac{1}{b+y+g+r}\Big)\\
&+r\Big(\frac{1}{w+b+y+g+r}\Big)\Big]\times\Big(\frac{(w+b+y+g+r)!}{w!b!y!g!r!}\Big)
\end{aligned}
$$

於是所求機率

$$
\begin{aligned}
p=&\Big[-3+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}\\
&+r\Big(\frac{1}{w+b+r}+\frac{1}{w+y+r}+\frac{1}{w+g+r}+\frac{1}{b+y+r}+\frac{1}{b+g+r}+\frac{1}{y+g+r}\Big)\\
&-r\Big(\frac{1}{w+b+y+r}+\frac{1}{w+b+g+r}+\frac{1}{w+y+g+r}+\frac{1}{b+y+g+r}\Big)\\
&+r\Big(\frac{1}{w+b+y+g+r}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

五. 綜合整理與比較

如果把這些問題的機率按照常數、簡單的分式、到複雜的分式加以排列

(1) 白球 w 個, 紅球 r 個。兩種色球時

$$p=\frac{w}{w+r}.$$

(2) 白球 w 個, 黑球 b 個, 紅球 r 個。三種色球時

$$p=-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+r\Big(\frac{1}{w+b+r}\Big).$$

(3) 白球 w 個, 黑球 b 個, 黃球 y 個, 紅球 r 個。四種色球時

$$
\begin{aligned}
p=-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+r\Big(\frac{1}{w+b+r}+\frac{1}{w+y+r}+\frac{1}{b+y+r}\Big)\\
-r\Big(\frac{1}{w+b+y+r}\Big).
\end{aligned}
$$

(4) 白球 w 個, 黑球 b 個, 黃球 y 個, 綠球 g 個, 紅球 r 個。五種色球時

$$p=-3+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}$$

$$
\begin{aligned}
&+r\Big(\frac{1}{w+b+r}+\frac{1}{w+y+r}+\frac{1}{w+g+r}+\frac{1}{b+y+r}+\frac{1}{b+g+r}+\frac{1}{y+g+r}\Big)\\
&-r\Big(\frac{1}{w+b+y+r}+\frac{1}{w+b+g+r}+\frac{1}{w+y+g+r}+\frac{1}{b+y+g+r}\Big)\\
&+r\Big(\frac{1}{w+b+y+g+r}\Big)
\end{aligned}
$$

我們似乎可以提出 m 種色球的一般化機率公式;

問題: 當有 m 種色球, 顏色是 c_1 的色球有 n_1 個, 顏色是 c_2 的色球有 n_2 個,.... 顏色是 c_{m-1} 的色球有 n_{m-1} 個, 顏色是 c_m (紅色) 的色球有 r 個, 全部放在一個袋子中, 從中每次隨機取出一球不放回, 紅球先取完的機率是:

$$p=-(m-2)+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{n_i}{n_i+r}+r\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^i\Bigg(\sum_{A\in\binom{M}{i}}\frac{1}{t(A)+r}\Bigg).$$

符號說明:

1. 上式中 $M=\{n_1,n_2,n_3,n_4,\ldots,n_{m-1}\}$, 它是前面 $m-1$ 種色球的個數所成的集合, 縱然有兩種以上不同色球的數目相同, 在 M 集合中, 當 $(k\neq j)$ 我們仍然必須把 n_k, n_j 看成是不同的元素。
2. $\binom{M}{i}$ 是代表由集合 M 中取出 i 個元素出來的部分集合。
3. 如果 $A=\{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_i\}$, 則 $t(A)=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_i$。

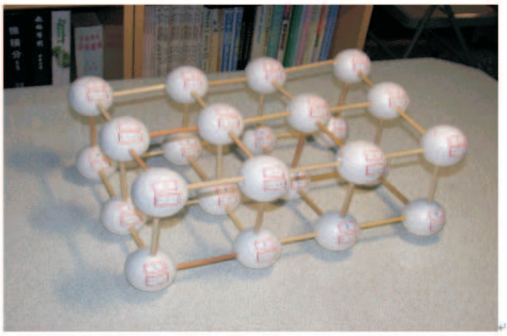
從上面的機率, 我們隱約看到了不同層次的數學規則, 也讓我們領略到: 在解題過程中由複雜、麻煩、毫無頭緒, 到實驗、探索、找出理路的學習歷程。藉著化混沌爲明朗的兩個工具:『排容原理與狄摩根定律』, 使我們在排列組合與機率的教學活動中, 得到組合計數方法的一點樂趣。

六. 結語

一個平凡的問題, 也含有深奧的道理, 只有透徹而深入的了解, 才算是掌握、克服了它。原先我們用保利龍球作了一個三種色球時, 計算不盡相異物排列數的模型教具, 想從機率實驗中, 寄望能找到一個遞迴關係式, 想藉著遞迴定義的演算法則, 來求得一般化的機率公式, 但卻不幸失敗了。

機率與不盡相異物排列數, 畢竟有一重隔閡, 不容易從機率實驗中看出支配全局的主角。直到把目標轉回到不盡相異物排列數的計算, 發現到決定組合計數方法的兩個定理, 居然是『排容原理與狄摩根定律』, 整個問題才眞正的豁然開朗。再利用不盡相異物排列數來計算所求的機率,

也就水到渠成。在這個研究過程中, 我感覺到學習組合數學的充實與快樂。也由衷的感謝國立交通大學應用數學系黃大原教授、陳明璋教授以及國立花蓮師院數理教育系袁媛教授給我的指導。



參考文獻

1. 新竹女中數學題庫。
2. 九十二年台北市聯合模擬考試數學試題
3. 屠規彰 (1981), 組合計數的方法及其應用, 科學出版社, 中國北京。
4. George E. Andrews (1973), Number Theory, Pennsylvania State University.
5. Sheldon Ross (1980), A First Course in Probability, University of California, Berkeley.

—本文作者任教於國立竹南高中—