物理原理在數學中的應用*

傅海倫

衆所皆知, 數學在物理學中的應用十分廣泛。物理學的發展往往需要借助於數學工具, 物理學原理也往往應用數學公理、定理、公式、法則等來闡述或證明; 另一方面, 物理學的革命往往推動數學的發展, 物理在數學中的應用受到重視, 特別是數學教育、教學中, 在思索和處理數學問題時, 若能借助於物理原型的啓發, 利用一些物理性質幫助分析, 就有可能構思出富有創造性的解法。本文以質量分佈原理、力係平衡原理、光學原理以及物理實驗爲例, 來說明物理學在數學中的應用, 以期拋磚引玉, 進一步推動這方面的教學研究。

一. 質量分佈原理

質量分佈原理是物理學中的基礎原理, 在物理學有著十分廣泛的應用。對於許多數學問題, 如果應用這個原理進行分析, 可以很好地把握住問題的本質, 也可構造出極富創造性的解法, 從而巧妙地解決問題。

例 **1.** 如圖 1 所示, D、E、F 分別是 $\triangle ABC$ 邊 BC、CA、AB 上的點, 且 $DC = BC/3$, $EA = CA/3$, $FB = AB/3$, AD 交 BE 於 P, BE 交 CF 於 Q, CF 交 AD 於 R, 已知 $\triangle ABC$ 的面積爲 7, 求 $\triangle PQR$ 的面積。

解析: 此題常見的解法是平面幾何的方法, 但需要添加輔助線, 計算十分複雜。這裡我們借助這樣一個物理原型: 視 $\triangle ABC$ 爲有質量的三角形, 它的三頂點就是三的質點, 令其質量分佈分別爲 $A:1$ 克; $B:2$ 克; $C:4$ 克, 則點 F 爲線段 AB 的重心, 其質量爲 $1+2=3$ 克, 點 D 爲線段 BC 的重心, 質量爲 $2+4=6$ 克, 而 $\triangle ABC$ 的重心必在線段 CF 上, 又在線段 AD 上, 故其交點 R 一定是 $\triangle ABC$ 的重心, 質量應爲 $1+2+4=7$ 克。

根據物理質量分佈與槓桿平衡原理, 有: $AR = 6RD$。

又易知 $\triangle ACD$ 的面積爲 $\triangle ABC$ 面積的 1/3 所以, $S_{\triangle ACR} = (\frac{1}{3}\times\frac{6}{7})S_{\triangle ABC} = 2$,

---

*本文爲山東省優秀中青年科學家基金和山東師範大學新世紀教學改革計劃項目成果。

同理可得, $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CBQ}=2$, 故 $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACR}-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CBQ}=7-2-2-2=1$

受此問題方法的啓發, 我們突破慣用的教學方法, 在許多數學的定理教學中, 自覺地嘗試運用物理學的有關原理, 會得出一些奇妙證明方法。

例如, 平面幾何中三角形重心定理的教學, 就應該突破純數學的方法推導、證明。其實, 它更適合應用物理學的原理來讓學生理解重心的概念, 從而掌握重心定理的實質。上例啓示我們用質量分佈原理進行證明:

如圖 2, 可將 $\triangle ABC$ 看作爲質量的三角形, 它的三個頂點就是三個質點。只要將 A、B、C 三點的質量分佈均爲 m 克, 則 D 爲 BC 重心, 質量爲 $2m$ 克, E 爲 AC 重心, 質量爲 $2m$ 克, 則 F 爲 AB 重心, 質量爲 $2m$ 克。三中線 AD、BE、CF 相交於一點 G, G 爲 $\triangle ABC$ 的重心, 質量爲 $3m$ 克, 所以有 $AG:GD=BG:GE=CG:GF=2:1$。

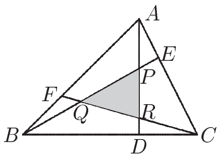

圖1

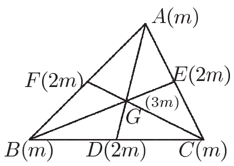

圖2

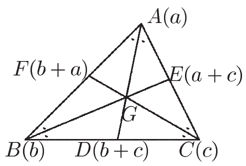

圖3

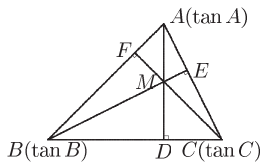

圖4

不僅如此, 對於三角形內角平分線定理: 只要將 $\triangle ABC$ 按如圖分佈質量: $A:a$ 克, $B:b$克; $C:c$ 克 (a、b、c 分別爲 BC、AC、AB 三邊長度值), 則可證明 $\triangle ABC$ 三內角平分線相交於一點, 如圖 3。

類似地, 對於三角形的三高線定理: 只要將 $\triangle ABC$ 按如圖分佈質量: $A:\tan A$ 克, B 克; $\tan B:C:\tan C$ 克 (A、B、C 分別 $\triangle ABC$ 三銳角值), 則可以證明 $\triangle ABC$ 三高線相交於一點, 如圖 4。

二. 力系平衡原理

例 **2.** 在哪裡建學校, 可使分別在三個村子 A、B、C 的三位學生到學校所走路程之和最小?

一般情況下, 採取數學的方法解決。如果給出具體數值, 如圖 5 所示, 學生們可利用平面幾何的方法找到符合條件的學校位置 F, 它使得 $\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$ (具體作法與證明略)。還可以建立直角座標系, 設 $F(x,y)$ 爲學校的特定位置, 用兩點間的距離公式, 在電腦上求出學校的近似位置。

可換個思考方法用物理中力系平衡原理和最小勢能原理求解。

方法: 在一水平木板上, 設立 A、B、C, 這三點所在位置相當於三個村子。在 A、B、C 處各打一小洞 (要均勻光滑), 取三條線繩紮結於一點 F, 穿過洞各掛 1 千克的重物。當系統平衡時, 繩結 F 點所在位置即爲所求。如圖 6, 當三個力系平衡時, 三重物的勢能的和應達到最小, 即在洞下面部份的繩的總長應達到最大, 由於繩的總長是定值, 故洞上面部份總長 $FA+FB+FC$ 達到最小。

現在, 讓我們具體分析一下, F 應處在何位置, 在什麼條件下, 系統才能平衡。有兩種情況討論:

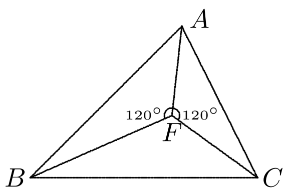

圖 5

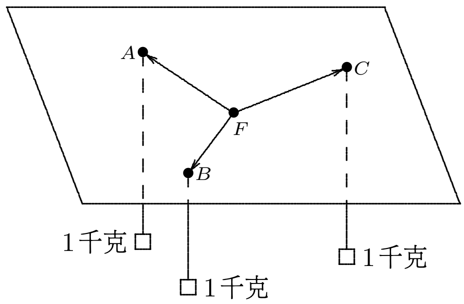

圖 6

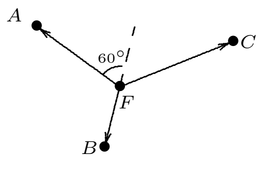

圖 7

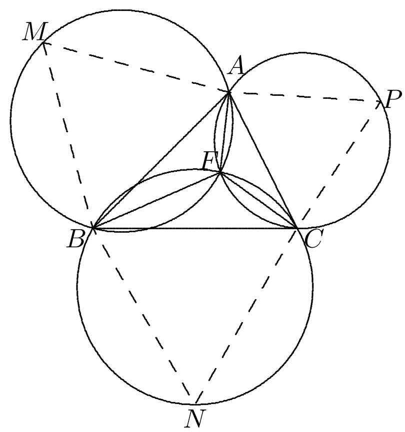

圖 8

(1) 若 $\triangle ABC$ 的內角均小於 $120°$, 如圖 7, 這時作用於 F 點有三個力, 分別沿 $\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FC}$ 方向, 力的大小都爲 1 千克, 故這三個力的向量長度應相等。當三個力平衡時, 三向量經平行移動應可圍成正三角形, 且向量方向和三角形邊界上的向量方向是一致的。根據向量性質: 若不共線三向量 $\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FC}$ 構成三角形, 則充要條件爲 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=0$。由於正三角形的內角都是 $60°$, 因此, 系統平衡時, F 不能與 A、B、C 重合, 這時有 $\angle AFB =$

$\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$。

(2) 若 $\triangle ABC$ 有一內角不小於 120°, 不妨 $\angle A\geq 120^\circ$, 則使得 $\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$ 的且與 A、B、C 不重合之點 F 是不存在的, 只有沿 FB、FC 方向的二力之和不大於 1 千克才行, 因此, 系統平衡只能發生在大於或等於 120° 的內角角頂 A。

總之, 要使 $FA+FS+FC$ 最小, 則若 $\triangle ABC$ 有一內角 $\geq 120^\circ$, F 應選在最大內角角頂; 當 $\triangle ABC$ 的內角均小於 120° 時, F 應選取在滿足 $\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$ 條件的位置上。

拓展: 若三個村子 A、B、C 分別有 m、n、p 個學生, 要使所有學生走到學校的路程之和最小, 學校 F 又該建在哪個位置?

類似地仍運用物理學的勢能最小原理, 只要在上題的設計中將三條繫在一起的繩子穿過小洞按各校的學生數分別掛 $m:n:p$ 的三個重物, 當系統平衡時, 繩結 F 所在的位置即爲所求。

上述問題在歷史上被稱爲費爾馬 (Fermat) 點問題: 給定平面上 A、B、C 三點, 試尋求一點 F, 使距離和 $FA+FB+FC$ 達到最小。

如何尋找費爾馬點, 曾引起人們的極大興趣, 當時物理學家伽利略 (Galileo, 1564-1642) 的學生、義大利物理學家、氣壓計的發明者托裡拆利 (Torricelli, 1608-1647), 首先用幾何方法證明了費爾馬點應是正 $\triangle ABM$、正 $\triangle BCN$、正 $\triangle ACP$ 的外接圓的交點, 如圖 8, 並證明了若 $\triangle ABC$ 三內角都小於 120° 及有一個大於或等於 120° 的情況, 結論與以上用物理學原理討論的 (1)、(2) 完全一致。

在托裡拆利工作基礎上, 英國數學家辛普生 (Simpson, 1710-1761) 於 1750 年得出一個重要結論: 連結 AN, BP 和 CM, 三線段相交的點就是費爾馬點。

19 世紀初, 瑞士著名幾何學家斯泰瑞 (Steiner, 1796-1863) 重新研究這一問題, 他用純幾何的方法證明了在具有定周長的所有三角形中, 等邊三角形包圍的面積最大, 同時找到了費爾馬點。1834 年, 德國數學物理學家海涅 (Heine, 1821-1881) 進一步指出: AN、BP 和 CM 線段的長度相等, 且都等於 $FA+FB+FC$。

1941 年, 著名美籍德國數學家柯朗 (Courant, 1888-1972) 和美國數學家羅賓斯 (Robbins, 1915-) 寫的名著「數學是什麼」中, 把費爾馬問題稱爲斯泰納問題, 此書影響很大, 所以至今稱這個問題爲斯泰納問題, 稱 F 點爲斯點。

隨著當代的最短網路在交通運輸、通訊、電腦等經濟和科技領域中的重要應用, 對費爾馬點問題研究的理論價值越來越大。問題的物件也早已從三點擴展爲任意有限個點集, 而且對於連結給出點集的最短網路也有專門的名詞, 叫最小斯泰納樹。

三. 光學原理的數學應用

1. "海倫光程最短原理"

公元 1 世紀的某一天, 一位老農請教古希臘數學家海倫 (Heron, 約 1 世紀) 一個問題: 我每天做完農活後都要到河邊洗刷農具, 然後再回家。河岸長長的, 如何選個洗刷地點, 使我從田地到河邊, 在從河邊到家的路程最短?

海倫用了 "光程最短原理" 解決了該問題: 如圖 9, 光從 A 點出發, 經 MN 反射到 B 點所構成的入射角必等於反射角, 即 $\angle 1 = \angle 2$, 於是, 根據光學作圖知識可知, 只需取 B 點關於 MN 的對稱點 B', 連 AB' 交 MN 於點 P, P 即爲所求點。因爲 "光在某種介質沿直線傳播, 而兩點之間直線最短原理", 這就是著名的 "光程最短原理", 後人把這條線稱爲 "海倫光程最短原理" 確定的 "海倫最短線"。

利用 "海倫光程最短原理" 可以解決許多最短路程的數學問題。

例如: 如圖 10: 一水手站在水庫中的小船上 A 點, 欲從船開始先游到 M_1N_1 岸, 然後再到 M_2N_2 岸, 最後在回到小船上, 試問: 如何確定路線使他遊過的路程最短?

方法: 根據 "海倫光程最短原理", 只需作出 A 關於 M_1N_1 的對稱點 A' 和 A 關於 M_2N_2 的對稱點 A'', $A'A''$ 的連線等於所求的最短路程。如圖, 連 $A'A''$ 交 M_1N_1 於 B, 交 M_2N_2 於 C, 連 AB、BC 和 CA, 則 $AB + BC + CA$ 即爲所求的最短路程。

2. 費爾馬光行最速原理

歷史上, 費爾馬曾聽過一個故事: 一位將軍帶領士兵在 A 地操練, 忽見營房 B 地著火, 便立即命令士兵跑步到小河 MN 處用頭盔取水後趕去 B 處救火。將軍按如圖 9 所示的路線, 自稱是一條能將水以最快速度運到營地的路線, 當然這是 "海倫光程最短線"。費爾馬聽後, 指出 "將軍所選的路線是錯誤的, 事實上有更好的一條路線"。費爾馬認爲, 士兵從 A 地到河邊是空手跑, 而從河邊到營地 B 是盛滿水跑的, 因此兩段的速度是不一樣的, 這種情況下, "海倫光程最短原理" 是不適用的。費爾馬接著就找最優點 P 如圖 11, 已知 $AC = a$, $BD = b$, $CD = d$, AP 段速度爲 V_1, BP 段速度爲 V_2, $(V_1 > V_2)$, 若設 $CP = x$, 則總時間 $T = \frac{AP}{V_1} + \frac{BP}{V_2} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{V_2}$, 而費爾馬發現用初等數學知識解上式求最短時間是十分複雜的。費爾馬也用光學原理去找 P 點, 他偶爾看到笛卡兒 (Descartes, 1596-1650) 於 1637 年討論光的折射現象時論證的斯涅爾定理: $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_1}{V_2}$ (i, r 分別爲入射角與反射角), 這個定律給他很大的啓發, 使他最終發現了 "光行最速原理": 將光的折射定律即斯涅爾定律應用於數學, 使之成爲解決極值的一條重要方法, 用這種方法即可解決在兩段路程上速度不等的問題。再比如對於以下問題:

例: 如圖 12, 要從 B 地去往 A 地, 有一條大道 BC, 在 BC 靠 A 的一側全是沙漠, 不好走, 若沿大道 BC 走到 D 點, 再走到 AD 段沙漠路, 雖好走一些, 但又繞遠了, 應該如何選取路線, 能最快到達 B 地?

利用 “費爾馬光行最速原理” 可巧妙解決: 已知 $AD=n$, $BD=\ell$, BE 段速度爲 V_1, EA 段速度爲 V_2, 令 $DE=x$, 則以 BE 作爲入射光線, EA 爲折射光線, 由折射定律: $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{V_1}{V_2}$。

其中 $i=90^\circ$, 又因爲 $\sin r=\frac{x}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $\sin 90^\circ=1$, 所以 $\frac{x^2+n^2}{x^2}=\frac{V_1^2}{V_2^2}$, $x=\frac{nV_2}{\sqrt{V_1^2-V_2^2}}$。

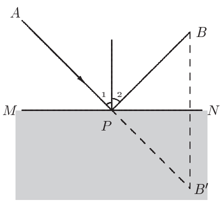

圖 9

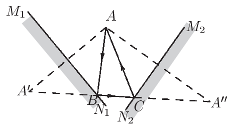

圖 10

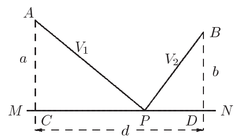

圖 11

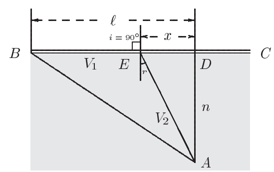

圖 12

以上我們討論了 “海倫光程最短原理” 和 “費爾馬光行最速原理”, 對數學教學有重要的指導意義。比如在數學教學中, 用上述原理可解決一些類似數學問題:

(1) 圖 13, 試在圓 O 上確定一點 P, 使 $AP+PB$ 最短?

(2) 如果在銳角三角形中作一個周長最短的內接三角形?

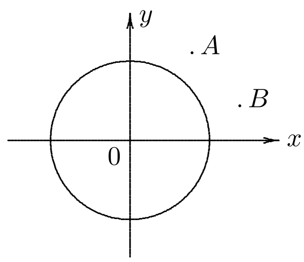

圖 13

四. 物理類比實驗法

有些數學猜想是通過物理類比並在物理類比的啓示下提出來的。比如, 在場設置的實際問題中, 人們歸結出這樣一個數學問題: 對平面上已知 n 個點, 把這 n 個點連結起來, 如何連線才能使長度最短? 爲了解決這個問題, 人們曾利用物理類比的方法予以探討。先選定一塊大小適當的細鐵絲網, 並在給定的幾個點的位置上各插一大頭針, 然後把它放在肥皀水裡, 最後再輕輕地將鐵絲網取出。這時, 如果從垂直於鐵絲網的方向看去, 便可以清楚地出鐵絲網上形成一些網狀線, 而且從具體測定發現這些線與線之間的結點角 (從某一點出發的射線間的夾角稱爲關於這一點的結點角) 不小於 120°。過去有人把這個實驗稱之爲 “膜實驗”。在這個實驗的啓示下, 人們提出 “在一個平面上 n 點連線總長度最短時其連線間的結點角皆不小於 120°” 的猜想。當 $n=3$ 時, 我們可以用初等幾何的方法證明此推斷中的條件不但是必要的, 而且也是充分的。但對於 $n>3$ 時, 其條件僅僅是必要的, 至於充分條件至今尚未找到。

綜上所述, 在解決數學問題時, 巧妙地利用了物理學原理的某些知識, 突破了解決數學問題的傳統思維方式, 這個處理問題的方法對培養學生的能力特別是綜合運用學科知識的能力, 全面提高科學素質具有重要的價值。數學教師應該教會學生變通思維, 靈活運用學科間互通的相關知識、廣角度、新視覺地思考數學問題, 這方面的教學研究有待進一步加強。

参考文獻

1. 蔣文蔚, 「數學發現與成就」, 廣西師範大學出版社, 1996年。
2. 傅海倫, “數學解題中的若干原型啓發”, 「教學與管理」, 1996年第4期。
3. 徐本順, 解恩澤, 「數學猜想集」, 湖南科學技術出版社, 1999年。

—本文作者任教於山東師範大學數學系—