# 關於賦範線性空間中的三類泛函方程

姚雲飛

摘要: 本文在賦範線性空間中考察下列幾類泛函方程 $f(x)g(y)=h(x+y)$ (I) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (Ⅱ) $f(x+y)=f(x)+f(y)+ag(x)g(y)$ (Ⅲ) 的性質與解以及彼此之間的關係。

關鍵詞: 泛函方程, 賦範線性空間, 凸泛函, 共軛空間, 連續泛函。

## 一. 背景簡況

18世紀初歐拉 (Euler)、拉格朗日 (Lagrange) 等著名數學大師就已經利用函數 (泛函) 方程解決問題, 1773年法國數學家蒙日 (Monge) 應用函數方程研究曲面理論時, 給出了函數方程的較一般的敍述。從1821年起, 數學家柯西 (Cauchy) 對一系列的一維空間中函數方程作了深入的研究, 並創造了一種求解函數方程的方法—柯西 (Cauchy) 法。

阿貝爾 (Abel)、維爾斯特拉斯 (Weierstrass)、羅巴切夫斯基 (Lobachevsky)、哈代 (Hardy) 等數學家將函數方程廣泛應用於各種不同的領域, 取得了驚人的結果。20世紀初期, 波蘭學派對函數方程進行了某些開創性的研究工作, 20世紀40年代後, 前蘇聯數學家蓋爾謝凡諾夫發展了函數方程的理論, 並應用函數方程理論成功地解決了一系列有關力學、滲透理論、彈性理論和地層動力理論的問題。

在函數 (泛函) 方程的研究領域中, 經過衆多的數學家付出了艱辛的勞動, 獲得了大量的結果, 其之應用日益廣泛深遠, 但令人遺憾的是至今還沒有建立起完整系統的函數 (泛函) 方程的理論, 甚至較一般的解法也知之甚少。

特別值得注意的是與函數方程密切相關的函數迭代有著深刻的理論背景和實用價值, 由於近年來關於渾沌理論和微分動力系統的研究與發展十分迅速, 引起了數學界的高度重視。

衆所周知, 微分方程、積分方程、泛函微分方程 [6] 均屬於函數方程之列。由此可見, 對一般的函數 (泛函) 方程研究其意義深遠。然近年來, 關於一般賦範線性空間中泛函方程的研究工

作卻不多見。本文將把在概率論中反復應用的 (例如在普阿松過程、指數分布、射擊彈落點分布等) [8] 一維空間中的函數方程推廣到賦範線性空間中的泛函方程 (I) 與 (II), 同時把 $R$ 中可用來描述歐幾里得平面中的仿射變換的單參數解函數方程 [7] [3], 提煉抽象, 推廣到了本文方程 (III)。研究其三者性質及其關係, 並給出其應用。

## 二. 方程 (I) 與 (II) 的關係

定理 1: 若

(1) $X$ 爲 $R$ 上的線性空間 (本文中 $R$ 均表示實數域、$\theta$ 爲 $X$ 中零元素)

(2) $h: X \to R$ 是實値泛函

(3) $f: X \to R$, $g: X \to R$ 是不恆爲零的實値泛函。

則泛函方程 (I) 總可以化爲 (II) 的形式。

證明: 用反證法證明 $g(\theta) \neq 0$, 假設 $g(\theta) = 0$, 則有 $h(x) = h(x+\theta) = f(x)g(\theta) \equiv 0$, 由於 $f(x)$ 不恆爲 0, 知至少有一個 $x_0$ 使 $f(x_0) \neq 0$, 從而 $g(x) = \frac{h(x_0+x)}{f(x_0)} \equiv 0$, 這與 $g(x)$ 不恆爲 0 的條件矛盾, 故 $g(\theta) \neq 0$, 同理可證 $f(\theta) \neq 0$, 由 $f(\theta)g(\theta) = h(\theta+\theta) = h(\theta)$ 知 $h(\theta) \neq 0$。

從 (I) 式知

$$f(x)g(\theta) = h(x) = f(\theta)g(x)$$

兩邊同除以 $f(\theta)g(\theta)$, 得知對任意 $x \in X$ 有 $f(x)/f(\theta) = g(x)/g(\theta) = h(x)/f(\theta)g(\theta)$ 恆成立, 於是令

$$p(x) = \frac{h(x)}{h(\theta)} = \frac{f(x)}{f(\theta)} = \frac{g(x)}{g(\theta)}$$

則有

$$p(x) = \frac{f(x)}{f(\theta)}, \quad p(y) = \frac{g(y)}{g(\theta)}$$

$$p(x+y) = \frac{h(x+y)}{h(\theta)} = \frac{f(x)g(y)}{h(\theta)} = \frac{f(x)}{f(\theta)} \cdot \frac{g(y)}{g(\theta)}$$

故 $p(x+y) = p(x)p(y)$, 即 (I) 化爲 (II) 的形式。

由定理1可見, 在條件 (1)、(2) 之下欲考察 (I) 的性質與解, 只要考察 (II) 的性質與解的情況即可。

## 三. 方程 (Ⅱ) 的性質

定理 2: 設 $X$ 爲 $R$ 上的線性空間 $f: X \to R$ 是不恆爲零的泛函, 若對任意 $x, y \in X$ 恆有

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{Ⅱ}$$

則

(1) $f(\theta) = 1$

(2) $f(-x) = (f(x))^{-1}$, $x \in X$

(3) $f(x) > 0$, $x \in X$

(4) $f(\sum_{j=1}^{n} x_j) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j)$, $x_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$

(5) $f(\alpha x) = (f(x))^{\alpha}$, $\alpha \in Q$, $x \in X$ (本文 $Q$ 表示有理數域, $Q^C$ 表示無理數集)

(6) $f(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \prod_{j=1}^{n} (f(x_j))^{\alpha_j}$, $\alpha_j \in Q$, $x_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$

(7) $f(x)$ 爲 $X$ 上次凸泛函 [1]。

(8) $f(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$ $(x_j \in X, j = 1, 2, \ldots, n)$

(9) 若 $x_j \in X$, $\alpha_j \in Q \cap [0, 1]$, 且 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, 則

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j)$$

(10) 若 $x_j \in X$, $q_j \in Q \cap [0, +\infty)$, 且 $\sum_{j=1}^{n} q_j > 0$, 則

$$f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j}\right) \le \frac{\sum_{j=1}^{n} q_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} q_j}$$

證明: (1) 因爲任取 $x$, $y \in X$, 恆有 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 特別取 $y = \theta$, 則有 $f(x+\theta) = f(x)f(\theta)$ 即 $f(x) = f(x)f(\theta)$, 由此知若 $f(\theta) = 0$, 則 $f(x) \equiv 0$, 這與 $f(x)$ 不恆爲零相矛盾, 故 $f(\theta) \ne 0$, 由 $f(x+y) = f(x)f(y)$, $(x, y \in X)$, 知 $f(\theta) = f(\theta+\theta) = f(\theta)f(\theta)$ 有 $f(\theta)(f(\theta)-1) = 0$, 由 $f(\theta) \ne 0$, 得 $f(\theta) - 1 = 0$, 故 $f(\theta) = 1$。

(2) 由任意 $x, y \in X$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ 知 $f(\theta) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x)f(-x)$, 由 (1) 已證 $f(\theta) = 1$ 知 $f(x)f(-x) = 1$ $(x \in X)$, 從而 $f(x) \ne 0$, $(x \in X)$, 於是 $f(-x) = (f(x))^{-1}$。

(3) 由 (2) 之證明過程知對任意 $x \in X$, $f(x) \ne 0$, 從而 $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2 > 0$。

(4) 用數學歸納法證明對任意 $x_j \in X$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 恆有 $f(\sum_{j=1}^{n} x_j) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j)$ 成立, 當 $n = 1$ 時, 顯然成立, 當 $n = 2$ 時, 由已知條件知: $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$。

假設當 $n=k$ 時, 等式成立, 即 $f(\sum_{j=1}^{k}x_j)=\prod_{j=1}^{k}f(x_j)$ 成立, 則當 $n=k+1$ 時, 據 $n=2$ 與歸納假設知, 有 $f(\sum_{j=1}^{k+1}x_j)=f[(\sum_{j=1}^{k}x_j)+x_{k+1}]=f(\sum_{j=1}^{k}x_j)f(x_{k+1})=\prod_{j=1}^{k}f(x_j)\cdot f(x_{k+1})=\prod_{j=1}^{k+1}f(x_j)$。

故由數學歸納法知對一切的自然 $n$, $f(\sum_{j=1}^{n}x_j)=\prod_{j=1}^{n}f(x_j)$ 成立。

(5) 由 (4) 知 $f(nx)=f(\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n})=(f(x))^n$ 即對任意 $x\in X$, $n\in N$, 恆有 $f(nx)=(f(x))^n$, 於是由 (2) 知 $f(-nx)=(f(nx))^{-1}=((f(x))^n)^{-1}=(f(x))^{-n}$ $(n\in N)$ 由 (1) 與 (3) 知 $f(0x)=f(\theta)=1=(f(x))^0$, 故當 $\alpha$ 爲整數時恆有 $f(ax)=(f(x))^{\alpha}$, 由 $f(x)=f(\overbrace{\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}x+\cdots+\frac{1}{n}x}^{n})=(f(\frac{1}{n}x))^n$ 知 $f(\frac{1}{n}x)=(f(x))^{\frac{1}{n}}$

於是對任意的整數 $m$ 與自然數 $n$ 有 $f(\frac{m}{n}x)=(f(\frac{1}{n}x))^m=((f(x))^{\frac{1}{n}})^m=(f(x))^{\frac{m}{n}}$。故 $\alpha\in Q$ 恆有 $f(\alpha x)=(f(x))^{\alpha}$。

(6) 由 (4) 與 (5) 知 $f(\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j)=\prod_{j=1}^{n}f(\alpha_jx_j)=\prod_{j=1}^{n}(f(x_j))^{\alpha_j}$。

(7) 因爲對任意 $x$, $y\in X$, 由 (6) 知 $f(\frac{x+y}{2})=(f(x)f(y))^{\frac{1}{2}}\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$, 故 $f(x)$ 爲 $X$ 上次凸泛函。

(8) 首先用數學歸納法證明當 $n=2^m$ 時有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

當 $n=1$ 時顯然成立。$(m=0)$

任取 $x_1$, $x_2\in X$, 由 (7) 知 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,
即當 $n=2$ 時成立。設對於 $n=2^m$ 時不等式

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^m})}{2^m}\quad\text{成立。}$$

現要證的是 $n=2^{m+1}$ 時也成立。於是設:

$$x'=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m},\quad x''=\frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}$$

則

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}+x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)\\ &=f\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\leq\frac{f(x')+f(x'')}{2}\\ &\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^m})}{2^{m+1}}+\frac{f(x_{2^m+1})+f(x_{2^m+2})+\cdots+f(x_{2^{m+1}})}{2^{m+1}}\\ &=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^{m+1}})}{2^{m+1}}\end{aligned}$$

故對於所有 $n$ 取形式 $2^m$ 時

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \quad \text{成立。}$$

現設 $n$ 不是 $2^m$ 的形式。我們取足夠大的 $m$, 使 $2^m > n$, (例如 $2^m = n+1$ 則 $2^m - n = 1$), 又設 $A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 於是 $x_1+x_2+\cdots+x_n = nA$,

且 $A = \dfrac{2^m A}{2^m} = \dfrac{nA + 2^m A - nA}{2^m} = \dfrac{nA + (2^m - n)A}{2^m} = \dfrac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(2^m-n)A}{2^m}$

$$= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+\overbrace{A+A+\cdots+A}^{(2^m-n)\text{ 個 } A}}{2^m}.$$

而由已經證明的事實知

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+\overbrace{A+A+\cdots+A}^{(2^m-n)\text{ 個 } A}}{2^m}\right) \\ &\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+\overbrace{f(A)+f(A)+\cdots+f(A)}^{(2^m-n)\text{ 個 } f(A)}}{2^m} \\ &= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)f(A)}{2^m}. \end{aligned}$$

於是 $2^m f(A) \leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)f(A)$,
從而 $2^m f(A) - (2^m-n)f(A) \leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$,
可見 $nf(A) \leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$,
故 $f(A) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$,
即 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。
故當 $n \geq 1$ 時 (自然數) $f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ 成立。
(9) 在 (8) 中取 $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_p$, $x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = z$,
知 $f(\frac{p}{n}x + (1-\frac{p}{n})z) \leq \frac{p}{n}f(x) + (1-\frac{p}{n})f(z)$。
記 $0 \leq \alpha_1 = \frac{p}{n} < 1$, $1 - \frac{p}{n} = \alpha_2$, 則 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$。

故
$$f(\alpha_1 x + \alpha_2 z) \leq \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(z) \tag{$*$}$$

用數學歸納法證明 (9) 成立。當 $n=1$ 時, (9) 自然成立; 當 $n=2$ 時, 由 $(*)$ 知 (9) 成立; 假設 $n-1$ 時, 結論成立, 則 $n$ 時有

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j + \alpha_n x_n = (1-\alpha_n)\sum_{j-1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{(1-\alpha_n)} x_j + \alpha_n x_n \in X,$$

而 $f(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j x_j)\le\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j f(x_j)$ (據歸納假設), 於是由歸納假設, 有

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right)&\le(1-\alpha_n)f\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\alpha_j}{1-\alpha_n}x_j\right)+\alpha_n f(x_n)\\&\le(1-\alpha_n)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\alpha_j}{1-\alpha_n}f(x_j)+\alpha_n f(x_n)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f(x_j),\end{aligned}$$

故由數學歸納法知命題成立。

(10) 任取 $x_j\in X$, $q_j\in Q\cap[0,+\infty)$, 且 $\sum_{j=1}^{n}q_j>0$, 在 (9) 中取 $\alpha_j=\frac{q_j}{\sum_{j=1}^{n}q_j}$ 即知 (10) 成立。

附註: (8) 即爲 $\sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$, 此乃是著名的 $n$ 個正數的幾何平均數不超過 $n$ 個正數的算術平均數的定理, 於是可以說這個著名的不等式被泛函方程 (Ⅱ) 所統一。

定理 3: 設 $X$ 爲 $R$ 上的賦範線性空間, $f:X\to R$ 是不恆爲零的連續泛函。若 (Ⅱ) 成立, 則

(1) 對任意 $\alpha_j\in R$, $x_j\in X$, $j=1,2,\ldots,n$, 有

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right)=\prod_{j=1}^{n}(f(x_j))^{\alpha_j}.$$

(2) $f(x)$ 在 $x_0$ 處具有界線性的 Gateaux 微分 [5], 且對任意的 $h\in X$ 及 $x_0\in X$, 存在 $B\in\mathcal{L}(X\to R)$ 使得 $D[f(x_0)h]=Bh=f(x_0)\ln f(h)$。

(3) $f(x)$ 是 $X$ 上的凸泛函。

(4) 對任意 $x_j\in X$, $q_j\ge 0$, $j=1,2,\ldots,n$, $\sum_{j=1}^{n}q_j>0$, 恆有

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}q_j}{\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{f(x_j)}}\le\exp\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}q_j\ln f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n}q_j}\right)\le\frac{\sum_{j=1}^{n}q_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n}q_j}.$$

證明: (1) 當 $\alpha_j\in Q$, 由定理 2(6) 知定理 3(1) 立。

當 $\alpha_j\in Q^C$ 時, 存在 $\lambda_j^{(m)}\in Q$, 且 $\lambda_j^{(m)}\to\alpha_j$ $(m\to\infty)$ $(j=1,2,\ldots,n)$

於是 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(m)}x_j\to\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$ $(m\to\infty)$, 由 $f$ 在 $X$ 連續知

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right)&=f\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(m)}x_j\right)=\lim_{m\to\infty}f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(m)}x_j\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(f(x_j))^{\lambda_j^{(m)}}=\prod_{j=1}^{n}(f(x_j))^{\lim_{m\to\infty}\lambda_j^{(m)}}=\prod_{j=1}^{n}(f(x_j))^{\alpha_j}.\end{aligned}$$

故任取 $\alpha_j \in R$ $(j=1,2,\ldots,n)$, 恆有 $f(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j) = \prod_{j=1}^n (f(x_j))^{\alpha_j}$ 成立。

(2) 因爲 $x_0 \in X$, 對任意 $h \in X$, 極限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} f(x_0)\left(\frac{(f(h))^t-1}{t}\right) = f(x_0)\ln f(h)$$

存在, 所以 $D[f(x_0)h] = f(x_0)\ln f(h)$。顯然存在 $B \in \mathcal{L}\,(X \to R)$ 使得 $Bh = f(x_0)\ln f(h)$。故 (2) 成立。

(3) 即證對任意 $\lambda \in [0,1]$, $x_1$, $x_2 \in X$ 恆有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, 當 $\lambda \in Q \cap [0,1]$ 時, 由定理 2(9) 知其成立。當 $\lambda \in Q^C \cap [0,1]$ 時, 則存在 $\lambda_n \in Q \cap [0,1]$ 使得 $\lambda_n \to \lambda$ $(n\to\infty)$, 於是 $\lambda_n x_1 + (1-\lambda_n)x_2 \to \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ $(n\to\infty)$, 由 $f$ 的連續性知:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= f\left(\lim_{n\to\infty}(\lambda_n x_1 + (1-\lambda_n)f(x_2)\right) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda_n x_1 + (1-\lambda_n)x_2) \\ &\le \lim_{n\to\infty}(\lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(x_2)) = \lim_{n\to\infty}\lambda_n f(x_1) + \lim_{n\to\infty}(1-\lambda_n)f(x_2) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

(4) 當 $q_j \ge 0$ 且 $q_j \in Q$, 由定理 2(10) 知 $f(\frac{\sum_{j=1}^n q_j x_j}{\sum_{j=1}^n q_j}) \le \sum_{j=1}^n \frac{q_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^n q_j}$ 當 $q_j > 0$ 且 $q_j \in Q^C$, 則存在 $q_j^{(m)} > 0$ 且 $q_j^{(m)} \in Q$, 使 $q_j^{(m)} \to q_j$ $(m\to\infty)$ $(j=1,2,\ldots,n)$, 於是由定理 2(10) 和 $f$ 的連續性知

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sum_{j=1}^n q_j x_j}{\sum_{j=1}^n q_j}\right) &= f\left(\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^n q_j^{(m)} x_j}{\sum_{j=1}^n q_j^{(m)}}\right) = \lim_{m\to\infty} f\left(\frac{\sum_{j=1}^n q_j^{(m)} x_j}{\sum_{j=1}^n q_j^{(m)}}\right) \\ &\le \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^n q_j^{(m)} f(x_j)}{\sum_{j=1}^n q_j^{(m)}} = \frac{\sum_{j=1}^n q_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^n q_j} \end{aligned}$$

於是由本定理 3(1) 知

$$\exp\left(\frac{\sum_{j=1}^n q_j \ln f(x_j)}{\sum_{j=1}^n q_j}\right) = \prod_{j=1}^n (f(x_j))^{q_j/\sum_{j=1}^n q_j} = f\left(\frac{\sum_{j=1}^n q_j x_j}{\sum_{j=1}^n q_j}\right) \le \frac{\sum_{j=1}^n q_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^n q_j} \qquad \text{(i)}$$

由上述 (i) 已證結果知

$$\exp\left(\frac{\sum_{j=1}^n q_j \ln\frac{1}{f(x_j)}}{\sum_{j=1}^n q_j}\right) \le \frac{\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{f(x_j)}}{\sum_{j=1}^n q_j}, \quad \text{於是}\ \frac{\sum_{j=1}^n q_j}{\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{f(x_j)}} \le \exp\left(\frac{\sum_{j=1}^n \ln f(x_j)}{\sum_{j=1}^n q_j}\right) \qquad \text{(ii)}$$

聯合 (i) 與 (ii) 知本定理 3(4) 成立。

附註: 此處給出了加權冪平均不等式的一個證明, 並且沒有用到導數等高深的數學工具, 特別是這些十分有用的著名不等式都可化成泛函方程 (Ⅱ) 之形式。

## 四. 方程 (Ⅱ) 的連續解

定理4: 若 $f: R^n \to R$ 是不恆爲零的連續泛函, 則方程 (Ⅱ) 的連續解爲

$$f(x)=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{\zeta_j},$$

(其中 $a_j=f(e_j)$, $e_j=(\underbrace{\overbrace{0,0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots,0}_{n})$, $j=1,2,\ldots,n$, $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ 爲 $R^n$ 的一組基底)。

證明: 由 $e_j=(\underbrace{\overbrace{0,0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots,0}_{n})$, $j=1,2,\ldots,n$, $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ 爲 $R^n$ 的一組基底, 知對任意 $x=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)\in R^n$, 有 $x=\sum_{j=1}^{n}\zeta_je_j$, 又 $f$ 連續, 於是由已知條件與定理 3(1) 知

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_je_j\right)=\prod_{j=1}^{n}(f(e_j))^{\zeta_j}=\prod_{j=1}^{n}a_j^{\zeta_j},$$

(其中 $a_j=f(e_j)$, $j=1,2,\ldots,n$)。

附註: 若方程 (I) 中, $f$ 和 $g$ 的條件與定理 4 的 $f$ 之條件相同, 則 (I) 之連續解爲

$$f(x)=f(\theta)\prod_{j=1}^{n}a_j^{\zeta_j},$$
$$g(x)=g(\theta)\prod_{j=1}^{n}b_j^{\zeta_j},$$

其中 $a_j=f(e_j)$, $b_j=g(e_j)$, $j=1,2,\ldots,n$。

定理 5: 若 $f: l^p\ (p\geq 1)\to R$ 是不恆爲零的連續泛函, 則方程 (Ⅱ) 的連續解爲

$$f(x)=\prod_{j=1}^{\infty}\eta_j^{\xi_j},$$

(其中 $\eta_j=f(e_j)$, $\xi_j\in R$, $e_j=(\overbrace{0,0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots)$, 本定理中 $l^p$ $(p\geq 1)$ 要求爲實賦範線性空間)。

證明: 由 $e_j=(\overbrace{0,0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots)$ 知 $\{e_1,e_2,\ldots,e_j,\ldots\}$ 爲 $l^p$ 的一組基底, 從而 $\forall x\in l^p$ 有 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_j,\ldots)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_je_j$, 由已知條件與定理 3(1) 知

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{\infty}\xi_je_j\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}f(e_j)^{\xi_j}$$

$$=\prod_{j=1}^{\infty}\eta_j^{\xi_j} \quad (\text{其中 } \eta_j=f(e_j),\ \xi_j\in R,\ j=1,2,3,\ldots)。$$

定理 6: 設 $X$ 爲 $R$ 上線性空間, 若 $f:X\to R$ 是不恆爲零的泛函, 則泛函方程 (Ⅱ) 總可以化爲泛函方程 Cauchy 形式, 即變爲 $F(x+y)=F(x)+F(y)$ 的形式 ($x,\ y\in X$ 且 $F:X\to R$)。

證明: 由已知條件與定理 2(3) 知 $f(x)>0$, 於是取 $F(x)=\ln f(x)$, 則有 $F(x+y)=\ln f(x+y)=\ln f(x)f(y)=\ln f(x)+\ln f(y)=F(x)+F(y)$。

故定理 6 成立。

引理 1:[1] 設 $X$ 與 $Y$ 都是 $R$ 上的賦範線性空間, 映射 $T:X\to Y$ 是連續算子, 若對任意 $x,\ y\in X$, 恆有 $T(x+y)=T(x)+T(y)$ 則 $T$ 是連續線性算子。

特別當 $Y=R$ 時, 則 $T$ 是連續的線性泛函。

推論 1: 設 $X$ 爲 $R$ 上賦範線性空間, 若 $f:X\to R$ 是不恆爲零的連續泛函, 則泛函方程 (Ⅱ) 總可以化爲線性泛函方程形式, 即變爲

$$F(\alpha x+\beta y)=\alpha F(x)+\beta F(y),$$

其中 $\alpha$、$\beta\in R,\ x,\ y\in X,\ F(x)=\ln f(x)$。

證明: 由定理6與引理1知 $F(x)=\ln f(x)$ 爲連續線性泛函數。
故 $F(\alpha x+\beta y)=\alpha F(x)+\beta F(y)$ 成立。

由推論1可得下面定理7成立。

定理 7: 若

(1) $X$ 爲 $R$ 上的賦範線性空間。

(2) 映射 $f:X\to R$ 是不恆爲零的連續泛函, 則泛函方程 (Ⅱ) 全部的連續解均可表示爲

$$f(x)=\exp(\varphi(x))$$

其中 $\varphi\in X^*$, $X^*$ 爲 $X$ 的共軛空間。

證明: 由推論1知當 $\varphi(x)=\ln f(x)$ 時 $\varphi(x)$ 爲 $X$ 上的連續線性泛函。
故 $\varphi\in X^*$, 從而由 $\varphi(x)=\ln f(x)$, 知 $f(x)=\exp(\varphi(x))$。

附註: 由定理7與線性泛函表示定理 [4] 可分別寫出在 $L^p[a,b]$ $(p\geq 1)$, $C[a,b]$, 與實的 Hilbert 空間中的關於方程 (Ⅱ) 的連續解的具體表達式。

## 五. 方程 (Ⅲ) 的性質

定理 8: 設下列三條件成立:

(1) $X$ 爲 $R$ 上的賦範線性空間;

(2) $f: X \to R$, $g: X \to R$ 是連續泛函且 $g(x)$ 是已知泛函;

(3) 任取 $x, y \in X$, 恆有

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + ag(x)g(y) \tag{Ⅲ}$$

其中 $a$ 爲任意常數。

(i) 若 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 爲泛函方程 (Ⅲ) 的任意兩個連續解, 則 $f_1 - f_2 \in X^*$;

(ii) 若 $f_0(x)$ 爲 (Ⅲ) 的一個連續特別解, 則其全部連續解均可表示爲:

$$f(x) = f_0(x) + \varphi(x)$$

其中 $\varphi \in X^*$。

證明: (i) 設 $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$, 則有 $\varphi(x+y) = f_1(x+y) - f_2(x+y) = (f_1(x) - f_2(x)) + (f_1(y) - f_2(y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$, 由引理1知 $\varphi \in X^*$;

(ii) 由 (i) $\Rightarrow f(x) = f_0(x) + \varphi(x)$, $\varphi \in X^*$

附註: (1) 若用觀察法得出 (Ⅲ) 的一個連續特別解, 則 (Ⅲ) 全部連續解就可立即寫出。

(2) 當 $X$ 分別爲 $R^n$, $l^p$ $(p \geq 1)$, $L^p[a,b]$ $(p \geq 1)$, $C[a,b]$ 與實 Hilbert 空間時, 由線性泛函表示定理 [1] [4] 知易寫出 $\varphi(x)$ 的具體表達式。

## 參考文獻

1. 定光桂著, 巴拿赫空間引論 (M), 北京: 科學出版社, 1984年2月, P.69, P.159.
2. M. Kuczma, Functional Equations in Single Varable (M) Monografie Mat. Tom 46, PWN, Warsaw, 1968.
3. 李文榮、司建國, 關於兩類函數方程, 數學評論與研究 (J), 1989年5月 (9卷2期)。
4. 夏道行等編著, 實變函數論與泛函分析 (下) (M), 北京: 高教出版社, 1985。
5. 郭大鈞著, 非線性泛函分析 (M), 濟南: 山東科技出版社, 1985。
6. 鄭祖庥著, 泛函微分方程理論 (M), 合肥: 安徽教育出版社, 1994年12月。
7. 司建國, 兩類函數方程, 濱州師專學報 (自) (J), 1987年2期, P.9-12。
8. 復旦大學編, 概率論 (第一册, 概率論基礎), 北京: 高等教育出版社, 1986年2月。

—本文作者是安徽省阜陽師範學院數學系教授—