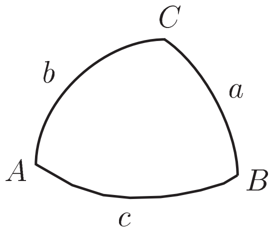
球面三角形的 AAA 定理

張海潮

正如平面三角形有正弦、餘弦律, (單位) 球面上的球面三角形也有球面三角的正、餘弦律。

在球面上取三點, 假設都在北半球內, 將這三點 (在北半球內) 用大圓連起, 就得到一個球面三角形 (圖一)



圖一

其中, A, B, C 表頂點的角度, a, b, c 表對應的弧長。我們有:

$$\text{正弦律：}\quad \frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\begin{aligned}\text{餘弦律：}\quad &\sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c\\ &\sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos c\cos a\\ &\sin a\sin b\cos C=\cos c-\cos a\cos b\end{aligned}$$

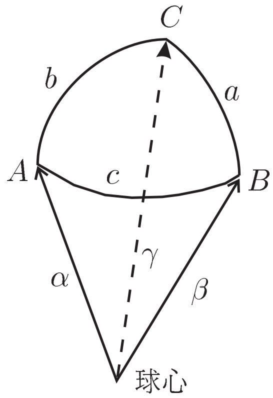
二律的證明不難, 我們將在附錄中提供。(註一) 基本上餘弦律告訴我們, 球面三角形的三個邊長如何決定它的三個角度, 這一點與平面的餘弦律相彷。

倒是球面三角還有一個角餘弦律, 又稱對偶餘弦律, 特別神奇, 爲球面三角學所獨有, 值得一提。

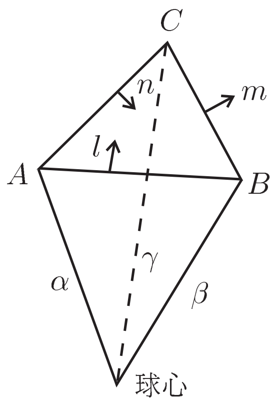
角餘弦律

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\cos a$$
$$\cos B+\cos C\cos A=\sin C\sin A\cos b$$
$$\cos C+\cos A\cos B=\sin A\sin B\cos c$$

此律證明了三個角如何決定三個邊。因此我們有 AAA 定理, 亦即兩個球面三角形如果對應角相等就得到全等, 不像平面三角形, 只能得到相似。



圖二



爲何如此? 一個球面三角形, 看似複雜, 其實不過是三個單位長的向量 α, β, γ 罷了。(圖二) 圖中 a, b, c 分別是 β 與 γ, γ 與 α, α 與 β 之間的夾角, 至於 A, B, C, 不過是相關平面之間的夾角, 例如 $\alpha\beta$ 決定的平面和 $\alpha\gamma$ 決定的平面之間的夾角就是 A。想像 $\alpha\beta$ 平面, $\beta\gamma$ 平面, $\gamma\alpha$ 平面都搭好了, 那麼球面三角也都跟著決定下來, 換句話說, 給定 A, B, C 三個角請你用過球心的三個平面搭出指定的夾角, 基本上只有一種搭法, 當然, 如果 $A+B+C$ 太小 (如果小於等於 π) 就搭不起來。(註二) 搭法只有一種指的就是 AAA 定理。

角餘弦律的證明有一個版本是利用對偶三角形 (註三), 這裡提供一個直接的證明, 不去碰球面三角的對偶問題 (同註三)

回到圖二, 以 l, m, n 表相關平面的單位長法向量, 不過 l, n 指向內, 而 m 指向外。

用兩個方法分別計算 $(n\times l)\cdot(n\times m)$

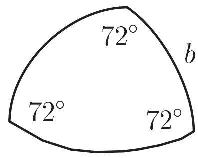
$$\begin{aligned}(n\times l)\cdot(n\times m)&=\begin{vmatrix}(n,n) & (n,m)\\ (l,n) & (l,m)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos C\\ -\cos A & \cos B\end{vmatrix}=\cos B+\cos C\cos A\\ &=|n\times l|\,|n\times m|\cos(n\times l \text{ 與 } n\times m \text{ 的夾角})\\ &=\sin A\sin C\cos b\end{aligned}$$

因爲 $n\times l$ 與 α 平行, 而 $n\times m$ 與 γ 平行, α 與 γ 的夾角就是 b。(註四)

有了角餘律之後, 很多球面上的幾何問題都可以利用角餘弦律來處理, 因爲畢竟角的關係比較容易掌握, 一個有趣的例子, 是如何計算內接於球面的正二十面體的稜長。這個問題通常要

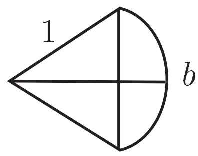
靠一點立體幾何的觀察找出一些邊長之間的關係 (註五)。現在, 我們把這個正二十面體從中心向球面作投影, 因此得到一個球面上的分割, 每一小塊都是一個球面正三角形, 不過由於在正二十面體的表面上, 每一個頂點屬於五個正三角形, 所以在球面上相關的正三角形的三個角的大小都是 $72°$ ($360°$ 除以 5), 利用角餘弦律

$$(\sin 72°)^2 \cos b = \cos 72° + (\cos 72°)^2$$



$$\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{代入求出}$$

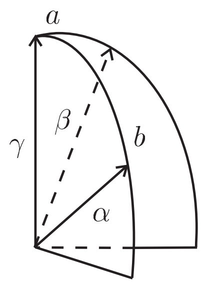
$$\cos b = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$



然後再計算 b 弧所對應的弦長, 弦長 $= 2\sqrt{\frac{1-\cos b}{2}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, 同樣的方法可以用來計算正十二面體的稜長, 有興趣的讀者可以試試。

附錄

一. 球面正弦定律



由圖, α, β, γ 三個單位長向量, 暫時把 γ 的頂點看成北極, α, β 的頂點分別在兩條經線上, α, β, γ 決定一個平行六面體, 體積 V, 注意到 α, β 所決定的平行四邊形沿著 γ 投影到赤道面上時, α 的投影長是 $\sin b$, β 的投影長是 $\sin a$, 而兩個投影之間的夾角是 C, 所以有:

$$V = \gamma \cdot (\alpha \times \beta) = \sin a \sin b \sin C$$

兩邊同除以 $\sin a\sin b\sin c$, 就得到正弦律

$$\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{V}{\sin a\sin b\sin c}$$

二. 球面餘弦定律

用兩種方式計算 $(\gamma\times\alpha)\cdot(\gamma\times\beta)$, 得出餘弦律。

$$\begin{aligned}(\gamma\times\alpha)\cdot(\gamma\times\beta)&=|\gamma\times\alpha|\,|\gamma\times\beta|\cos C=\sin b\sin a\cos C\\&=\begin{vmatrix}(\gamma,\gamma)&(\gamma,\beta)\\(\alpha,\gamma)&(\alpha,\beta)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1&\cos a\\\cos b&\cos c\end{vmatrix}=\cos c-\cos a\cos b\end{aligned}$$

註一. 也可以參考項武義的書: Least Action Principle of Crystal Formation of Dense Packing Type and Kepler's Conjecture, World Scientific. 第30頁。

註二. 可以直接證明三個平面共點時, 其相關的夾角之和大於一百八十度。同時, 由基本的球面幾何知道球面三角形的面積等於 $A+B+C-\pi$。

註三. 參考曹亮吉的書: 阿草的葫蘆, 遠哲科學教育基金會出版, 第179頁。

註四. 由 l, $-m$, n 三個單位長向量所形成的球面三角形就是所謂的對偶三角形, 它與原來三角形之間有簡單的邊角關係, 利用原來球面三角形的餘弦律加上與對偶三角形的特殊邊角關係也可證出角餘弦律, 請參考註三。

註五. 同註三, 第155頁。

—本文作者曾任教於臺灣大學數學系, 現已退休—