幾何學發展史簡介

吳志揚・陳文豪

前言

本文主要是以通俗的方式, 向讀者介紹『幾何』這個領域, 並希望藉此吸引一些有興趣的學生來研究這門學問。整篇文章所介紹的幾何發展史其實是相當簡略的。我們的重點不在於對時間與年代做精確的考究, 而是以作者的角度, 介紹影響幾何學發展的重要思想, 以及它們如何演變。在介紹這些偉大的理論之前, 我們必須先界定一個基本的問題, 即『什麼是幾何學呢?』

什麼是幾何學

幾何學是一門研究『空間』與『移動』的學問。這裡的『空間』指的是正統的『幾何空間』, 包括各種具體或抽象的幾何圖形, 甚至是整個宇宙空間的幾何構造; 而『移動』則是這些幾何空間的表現, 例如: 平移、旋轉、對稱、波動等等。因此, 幾何學可說是眞實世界與抽象世界的舞台與演員的演出。而數學家 Descartes (笛卡兒, 1596∼1650) 曾說:『人類心智與生俱來有完美、空間、時間和運動等觀念。』不論是實際生活上爲了丈量與計算的需要, 或是對於宇宙空間的好奇與探索, 亦或是對於『美』的追求, 自從人類開始生活在地球上, 幾何概念的演進便未曾停歇。而幾何學的發展, 也使人類開始眞正認識我們所生存的宇宙空間。

影響幾何學發展的重要思想

在孕育出有如巨大神木之現代幾何學的過程中, 許多重要的理論是這棵幾何神木的主要枝幹。以作者的觀點, 我們將其由古至今, 總括爲以下25個:
1. π 的概念的形成。2. 畢氏定理。3. 歐基理德幾何原本及其影響。4. 柏拉圖的五個正立方體。5. 阿基米德的球體積的推導。6. 祖沖之原理。7. 笛卡兒的座標系統。8. 牛頓、萊布尼茲的微積分發明。9. 高斯的優美定理、Gauss-Bonnet 定理。10. 非歐幾何的發展與黎曼的內在幾何觀。11. Lagarange 的變分法及 Laplace 的天體力學。12. 尤拉數與波動方程。13. Klein's

program。14. 龐加萊平面及基本群。15. Hilbert 的幾何基礎。16. 愛因斯坦的廣義相對論。17. de Rham cohomology、Hodge 理論及 Cartan 的微分形式觀點。18. 陳省身的特徵類與 Chern-Weil, Chern-Simon 理論。19. Rauch比較定理。20. Atiyah-Singer 指標定理。21. 丘成桐教授所代表的幾何分析。22. Donaldson, Seiberg-Witten 理論。23. M. Gromov 的辛幾何。24. Mandelbrot 的碎形幾何與混沌理論。以及電腦時代的產物– 25. 計算幾何的發展, 這可能是本世紀最爲重要的。

以下我們由思想的演進以及人類在幾何觀點上的變化, 從上述的重要思想理論中, 再挑出十個做較爲深入的探討。從作者的角度來看, 這十個思想代表了整個幾何發展的主軸。它們分別是:

一. Pythagoras (畢達哥拉斯, 約西元前6世紀) : 畢氏定理。

畢氏定理又稱爲『商高定理』, 在小學的數學教材內即有收錄。這個在現在看起來相當容易理解的定理卻可視爲一個文明能否發展的重要指標。簡單的說, 由於畢氏定理的提出, 顯示人類已經能夠『初步地掌握方向的變化』。兩千六百年前的人已經知道, 如果從起點開始向東走四步, 再向北走三步, 則最後到達的地方與原出發點的距離爲五步之遙。也就是說我們已經會變化方向, 而不再只是單線的在前進。有了這樣的概念, 三角形中的正弦定理、餘弦定裡就可以被推導出來, 並可被運用來測量距離、造橋、築屋及計算砲彈射程等等。

二. Euclid (歐基理德, 約西元前300～260) : 幾何原本。
Archimedes (阿基米德, 約西元前287～212) : 級數和、球體積。

歐基理德的幾何原本 (The Elements) 總結了希臘時代的數學成果。它被認爲是西方科學發展異於東方科學的最大特色。在書中推導出許多現存於中學數學教材內的重要結果, 例如像畢氏定理、三角形內角和等於180度等等, 而推出這些結果的主要依據, 則是像下面幾個基本的幾何公設:

五大幾何公設

1 .過相異兩點, 能作且只能作一直線 (直線公理) 。

2. 線段 (有限直線) 可以任意地延長。

3. 以任一點爲圓心、任意長爲半徑, 可作一圓 (圓公理)。

4. 凡是直角都相等 (角公理)。

5. 兩直線被第三條直線所截, 如果同側兩內角和小於兩個直角, 則兩直線作延長時在此側會相交。

其中第五公設又叫做『平行公設 (the parallel axiom)』, 因爲它等價於:

5’. 在一平面內, 過直線外一點, 可作且只可作一直線跟此直線平行。

奧瑟曼教授對於這本在兩千三百多年前完成的書有很高的評價, 他的評價是: (參見 [3], p.69∼p.70)

它給了相當的『確定感』;
它的方法具有強大的威力;
證明方法展現高妙的才智;
幾何圖形的美感。

也許以現代的角度看來, 幾何原本所提及的僅是相當基礎的內容, 但是在兩千兩百多年以前, 人類卻能以這些簡單的知識, 加上對天文的觀測, 巧妙地測量出地球的長度。埃拉托斯特尼 (Eratosthenes, 約西元前270-190) 採用了如下的做法: 距離當時的亞歷山大城正南方500英哩處有一座亞斯文城, 這個城市有著相當特殊的地理位置, 它與我們的嘉義市相同, 位於北迴歸線上。所以在亞斯文城的地面上插上一根旗竿, 觀察每天正午竿影的長度, 我們可以確定一年中夏至 (太陽直射北迴歸線) 的時間。埃拉托斯特尼在夏至的正午時分, 同時在亞歷山大城與亞斯文城插上一根旗竿, 並且測量出旗竿與太陽光線所夾的角度大約是圓周長的50分之一, 因而算出地球的周長大概是 $500 \times 50 = 2500$ (英哩) 。這已經是相當精確的數值。在那個大多數人認爲地表是平坦的年代, 只用一些簡單的數學理論及天文知識, 卻可以把地球的大小測量出來。

在希臘時代, 人類可以處理一些非常正規的圖形。到了阿基米德的時代, 他利用槓桿原理來推導球的體積。除此之外, 阿基米德對於彎曲的幾何形體也有初步的掌握。例如他用無窮級數和的方法能夠求得直線與拋物線圍成的區域面積大概有多大。另一方面, 在大約西元五世紀時, 中國數學家祖沖之利用所謂的祖沖之原理『若兩立體在等高處截的面積一樣, 則這兩個立體的體積相等』, 也可以推算出球的體積。雖然這些問題在微積分出現之後就變得相當容易解決, 但是在微積分誕生之前人類就有這樣的概念, 其實是相當偉大的。

三. Descartes (笛卡兒, 1596∼1650) : 座標系統。

根據科學演進的過程看來, 笛卡兒的座標系統可說是西方科學發展的重要里程碑。在一個抽象的平面上建立一個直角座標系統 X 與 Y, 精確地描述每一個點的位置, 這樣的概念對現在的國中生來說, 是相當容易理解的, 也覺得很容易學, 但是它卻有劃時代的作用。在希臘時代, 人類處理幾何的問題, 只能以圖形的角度出發, 透過作圖、畫輔助線等方式來決定諸如是否等分或是否垂直等問題。但是這個座標系統一給定之後, 我們便可以把幾何問題代數化。例如, 在笛卡兒之前所瞭解的直線或圓只是一個圖像, 但是有了座標系統之後, 我們可以用方程式很精確

地把它們描述出來, 也可以很清楚的知道它們的相交狀況。除了把幾何圖像轉換成可操作的數字之外, 笛卡兒的座標系統同時說明了數字的問題也有其幾何意義。

除此之外, 沒有座標系統的輔助, 很難想像人類能夠有效率的發展出現代函數的概念, 更遑論對『變化率』- (rate of change) 精確的掌握。而 rate of change 的概念則是造就了一個促成今日科學與社會發展的數學理論-『微積分』。

四. Newton (牛頓, 1642∼1727) : 力學、萬有引力、微積分。
Leibniz (萊布尼茲, 1647∼1716) : 微積分。

幾何學在笛卡兒的座標系統提出之後, 有了快速的發展。牛頓由於研究萬有引力與運動定律, 進而發明了微積分。幾乎同一個時期, 萊布尼茲也發展出相同的理論。相較於希臘時代人類只會處理一些正規的圖形, 以及阿基米德時代嘗試去瞭解一些彎曲的東西, 有了微積分之後, 我們在理論上已經可以求出任意曲線的長度以及曲線底下的面積, 對於彎曲及變動的現象具有一定程度的認識。

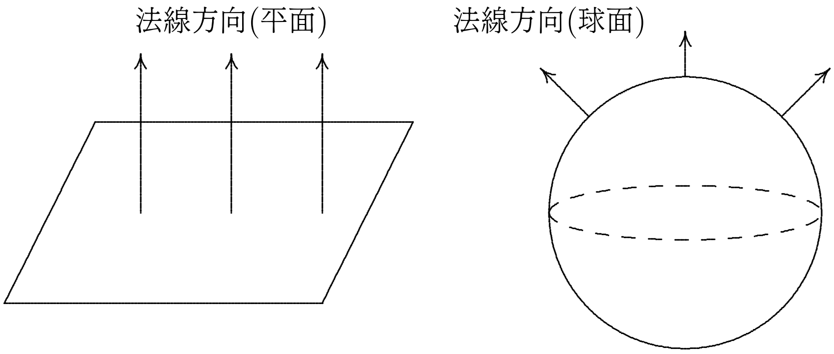
總結早期的幾何學發展, 人類從只會處理平直的、正規的圖形問題, 到後來由於座標系統與微積分的發明, 對於平面上的曲線、不規則區域, 以及任意的立體圖形之長度、面積與體積等問題都能夠掌握, 只是在幾何的本質上仍屬於歐氏幾何的一部份。在這段期間內, 透過天文的觀察以及一些如哥倫布等的探險家的航海經驗, 人類已經漸漸接受所生活的地表並非是平坦的。這個結果引伸出一個問題: *我們所發展的幾何學是否適用於整個地球, 甚至宇宙呢?*

歐氏幾何討論的圖形都是在一個一望無際的平面上, 因此有所謂的『平行公設』。事實上, 一個渺小的人類面對廣大的地表, 他會認為週遭的景物都位於一個平面上是很自然的事。就像在一個半徑很大的圓周上, 兩相鄰點之間的連線幾乎可以看成是一條平直的線段 (事實上是一段角度很小很小的弧線) 。但是如果考慮整個球形的地球, 我們顯然必須發展一套新的幾何學以切合需要。高斯首先討論三維空間中的曲線與曲面, 黎曼將高斯的結果一般化, 而愛因斯坦則是藉由這些理論發展出『相對論』, 說明了我們所存在的時空是彎曲的。以下簡述他們的思想與貢獻。

五. Gauss (高斯, 1777∼1855) : 優美定理、Gauss-Bonnet 定理。
Riemann (黎曼, 1826∼1866) : 內在幾何、非歐幾何。

在高斯的時代, 對於曲線與曲面已有透澈的瞭解。我們以『曲率』一詞, 來精確的量度曲線或曲面彎曲程度的大小。所謂的曲率, 基本上是指某一個指標方向的變化量。所以, 直線之所以是『直』的, 是因為它沿著某一個指標的方向永遠都不動; 而衡量曲面彎曲的程度則是考慮外在

的法線方向 (normal direction) 的變化。例如平面上各點的法線方向均相同, 故平面的曲率爲 0; 而一個半徑爲 1 的球體在各點的法向量變化均爲 1, 所以這個球面的曲率等於 1 (見下圖) 。



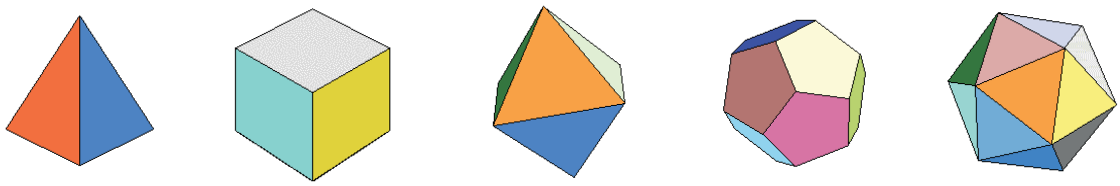
事實上, 有關曲面曲率的概念早在高斯之前就有人開始研究, 而它被稱之爲『高斯曲率 (Gaussian Curvature) 』主要是因爲高斯證明了所謂的『優美定理 (Theorema Egregium) 』-“高斯曲率是內在決定的”。

我們會知道籃球是彎的, 那是因爲我們站在籃球的外面, 從外在的觀察瞭解它是彎曲的。如果有一隻只有針尖大的小小螞蟻住在籃球上, 它能否感受到它所居住的地方事實上是彎曲的呢? 高斯告訴我們, 如果夠聰明的話, 你還是可以知道活在曲面裡。應用在實際生活上, 如果不從外太空來看, 我們如何知道地球是彎曲的呢? 相信大家在小學時期都被問過這樣的問題:『如果站在港邊遙望進港的船隻, 首先會看到的是船頂的旗幟、駕駛艙、船身或是同時出現? 』這個問題的答案告訴我們地表是彎曲的。因此, 雖然我們定義曲率這個量是從外在來看的 (藉由法向量的變化求得), 但實際上曲率這個量可以由內在 (即空間度量長度的方法) 計算而得, 這是高斯在幾何上一個非常重要的觀點。

高斯在幾何上另一個重要的成就, 是證明了所謂的 Gauss-Bonnet 定理: 如果 S 是一個可定向的 (orientable) 封閉 (closed) 曲面, K 代表 S 上的曲率函數, $\chi(S)$ 表示 S 的尤拉特徵數 (Euler characteristic), 則可以得到

$$\iint_S K\, d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

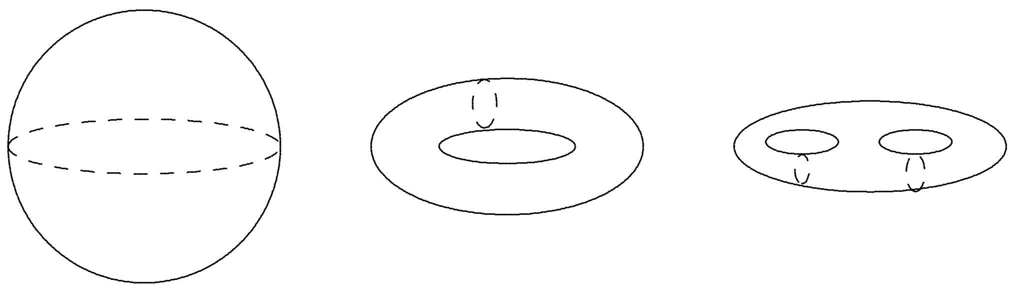
其中 $\chi(S)$ 是一個僅與 S 上的拓樸 (topology) 有關的量。拓樸學是一門研究空間在連續變換 (例如: 拉長、壓縮等) 之下仍保持不變的性質。若 S 是一個多面體, 則 $\chi(S)$ = 頂點數+面數−邊數。我們發現, 對任意的多面體, $\chi(S)$ 的值恆等於2。例如, 空間中的正多面體只有下面五種 (如下圖) : (1) 正四面體 (Tetrahedron)、(2) 正六面體 (Cube)、(3) 正八面體 (Octahedron)、(4) 正十二面體 (Dodecahedron) 與 (5) 正二十面體 (Icosahedron)。



(1) (2) (3) (4) (5)

以 (4) 正十二面體爲例, 頂點數 (20)+ 面數 (12)− 邊數 (30) = 2。其他的圖形也有相同的結果。

由拓樸學的觀點來看, 一個籃球甚至是一個不規則的鵝卵石, 它們的 $\chi(S)$ 都是 2 (如下圖 (1)) 。一般的公式是 $\chi(S) = 2 - 2\times$ 虧格數 (genus), 例如甜甜圈的 genus 爲 1, 所以它的 $\chi(S) = 0$ (如下圖 (2))。由 Gauss-Bonnet 定理可以得知, 一個與球面 (下圖 (1)) 在拓樸上等同的曲面 (例如一個鵝卵石) 上, 絕不可能處處都是負曲率, 因爲 $\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S) = 4\pi > 0$。



(1) genus= 0 $\chi(S) = 2$ 曲率大於 0

(2) genus= 1 $\chi(S) = 0$ 曲率等於 0

(3) genus= 2 $\chi(S) = -2$ 曲率小於 0

Gauss-Bonnet 定理展示出存在於剛性的幾何結構與柔性的拓樸結構之間的微妙關係, 亦即某些需要定義出距離才有的幾何性質, 事實上在幾何體形成時的拓樸結構就已經決定了, 這對於後來幾何的發展, 產生了深遠的影響。

黎曼是高斯的學生, 他考慮更一般的空間並提出更進一步的觀點, 即曲率完全由內在決定, 根本不需要任何外在的輔助。黎曼發展出一套有別於傳統歐基里德幾何學的理論-黎曼幾何學 (Riemannian Geometry), 其影響範圍遍及近代數學與物理學。這種異於傳統歐基里德幾何學的理論又被稱爲非歐幾何。

非歐幾何的發展起因於人們對於歐基里德平行公設的懷疑。試想在一顆籃球上怎麼可能畫出兩條彼此互不相交的『直線』? (球面上的『直線』爲圓心等於球心的圓-即大圓, 例如經線與赤道。) 同樣地, 對於不同空間中的『三角形』之內角和是否仍爲180度? (球面上三直線所圍成的三角形之內角和超過180度, 且超出的部分與其曲率有關。) 這類理論早期的代表性人物有高斯、Lobachevsky (1793～1856) 與黎曼。他們在公理系統中採用了不同的平行公設, 因而得到異於歐氏幾何的幾何體系。這個體系開拓了人類對幾何學觀念的認識, 也引導人們對幾何學基礎的深入研究。

六. Ricci (里奇, 1853～1925) : 張量分析。

黎曼的內在幾何觀點告訴我們, 一個彎曲空間的幾何結構完全由空間本身來決定。因此, 我們必須發展出一套在彎曲空間中處理 rate of change 的理論, 來完備黎曼的想法。Ricci 提出『連絡 (connection) 』的概念, 建立了彎曲空間上的微積分-即張量分析 (tensor analysis), 精確地建構出黎曼幾何的理論。

我們討論的彎曲空間有一個數學上的名字-黎曼流形 (Riemannian manifold) 。流形的想法其實是歐氏幾何的推廣, 流形上的局部區域與歐氏空間有相同的拓樸或微分結構。舉例來說, 一個籃球可視爲是由上、下、前、後、左、右六個半球所組成 (當然會有重複的部分), 而每一個半球把它壓平之後其實就是一個我們所熟知的平面。對於處理平面上的問題, 我們已經駕輕就熟; 然而要如何在每一塊等同於平面的區域接合起來之後, 所建立的微積分在重複的部分仍保有相容性 (compatibility), 使其能適用於整個流形, 就必須有『連絡 (connection) 』的概念, 這是 Ricci 的貢獻。

七. Poincare (龐加萊, 1854～1912) : 代數觀點: 基本群。

龐加萊於1895年引進基本群 (fundamental group) 的重要概念, 創造了流形的三角剖分 (triangulation) 、單純複合形等, 證明了流形的同調對偶定理。此思想引發了 de Rham 理論和 Hodge 理論。他對現代數學最重要的影響是創立了代數拓樸理論, 主要是依賴代數工具來處理幾何問題。

八. Einstein (愛因斯坦, 1879～1955) : 相對論。

黎曼幾何的發展, 在當時被視爲是人類一種抽象概念的自然演變過程, 至於有無實際上的應用, 則不得而知。促使黎曼幾何學成爲二十世紀科學發展不可或缺的重要理論, 乃是由於愛因斯坦所提出的『廣義相對論』的理論。

愛因斯坦承襲了高斯及黎曼關於內在幾何的想法, 並且把它實物化。*我們活在一個四維的時空當中, 而且可以知道它有沒有彎, 以及彎曲的程度如何*。這就是愛因斯坦的引力場方程式 (Field Equation) :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -8\pi G T_{ij}$$

這裡 R_{ij} 表示 Ricci 張量, R 表 scalar 曲率, T_{ij} 表 (能量動量) 張量, G 表引力常數。

愛因斯坦提出這一套理論, 其中最重要的是說明當光線通過一個質量比較大的星球時, 因其有等效的質量, 它應該要走彎曲的路線, 這是由於質量與能量是等價的, 在質能的附近會產生彎曲的現象, 亦即在時空中,『曲率是重力的僞裝』(見 [3], p.160) 。不過愛因斯坦的理論後來並沒有得到很大的迴響, 直到六十年代藉由天文學上的觀測得到印證, 才漸漸的受到重視。其中哈伯發現了哈伯定律, 偵測到宇宙在前進, 星系在遠離地球, 從觀測者的角度來看, 它遠離的速度與距離成正比, 所以宇宙正在膨脹中。反過來說, 如果倒推回來, 應當在同一個時間, 大家都聚在同一個點, 這就是所謂的大爆炸理論。這些結果爲愛因斯坦的理論提供了有力的實證。事實上, 地球繞太陽旋轉而運動, 其實是在走它彎曲時空的測地線 (geodesic) 。它其實不是眞正封閉的橢圓, 其在近日點會有偏差, 只是這個效應不大, 以前這是天文上的一個謎。

總括來說, 愛因斯坦的理論被肯定的理由有三個: 光線的彎曲、水星在近日點的偏移, 以及星系的紅外移。其中水星在運行到太陽附近會產生軌道的偏離, 長久以來一直是天文學上的一個謎。愛因斯坦利用高斯與黎曼建立的抽象數學理論, 發展出相對論解釋了這個現象, 除了讓我們更清楚瞭解自己身處的宇宙時空之外, 也應驗了非歐幾何學始祖 Lobachevsky 的話:『數學不管多抽象, 總有一天可以用在外在的眞實世界』。

九、Cartan(卡當) 、S.-S Chern(陳省身): 大域內在幾何、微分形式方法。

卡當與陳省身先生運用不同的觀點來研究微分幾何學。相較於以往著重於對『向量 (vector) 』的探討, 卡當與陳省身則是採用對偶 (dual) 的觀點, 也就是以形式 (form) 即映射的觀點來看。這個部分在很多課程都有詳盡的探討, 在此不多贅述。

十. B. Mandelbrot (曼德布落特, 1924∼) : 碎形幾何。

幾何的發展從一開始只能掌握正規的圖形, 到牛頓時代藉由微積分開始去瞭解彎曲的情形, 接著高斯與黎曼的時代建立了內在幾何的觀點, 最後由愛因斯坦集其大成, 提出相對論理論, 使人類更進一步瞭解自己所生存的時空。似乎這些主要的想法均已被前人提出, 後世的人只能在這些想法之下從事一些研究。然而, 在1962年, 曼德布落特提出了碎形幾何 (fractal geometry) 的理論, 開啓了一個全新的研究領域。他觀察我們一般所看到的雲、星系、海岸線、雪花甚

至是腫瘤等等, 這些看似雜亂的幾何體卻都含有某種規則, 這與最近熱門的混沌 (chaos) 理論都是新一類的數學。這些現象, 從幾何的角度來看, 在以前是無法處理的。因爲要建立這類的理論, 若沒有電腦的幫助, 是無法達成的。例如牛頓求根的方法, 若只用筆紙進行運算, 則大概只算到三、四項就很複雜了, 但只算出三、四項並無法感受到這個方法的威力。由於現代資訊電腦的發達, 幫助了人類處理碎形與混沌理論的相關問題, 使幾何的研究邁入一個新的紀元。

幾何時間史

如果把整個我們幾何發展的時間史, 轉換成一年的時間, 會有怎樣的發現呢? 從希臘時代演變到今日, 如果我們把十年當作一日, 以12月31日代表西元2000年, 那麼上面所提到的幾個重要思想所分佈的時間點, 可以彙整成如下頁的幾何時間表:

(以一年計) 月 日	重要事件	相對之西元記年
1月 1日	古希臘文明發跡。	約1650 B.C.
4月15日	畢氏定理。	600 B.C.
5月15日	歐基里德幾何原本。	300 B.C.
5月20日	阿基米德級數和、球體積。	250 B.C.
6月15日		(西元元年)
11月25日	笛卡兒座標系統。	1630
11月29日	牛頓、來布尼茲微積分。	1670
12月14-17日	高斯、黎曼非歐幾何、內在幾何觀點。	1820−1850
12月22日	龐加萊基本群、Ricci 張量分析。	1900
12月24日	愛因斯坦相對論。	1910−1920
12月27日	卡當、陳省身大域內在幾何。	1950
12月29日	曼德布洛特碎形幾何	1970
12月31日	(西元2000年)	2000

由上表我們可以看出以下幾件重要的事實: 首先, 由於要形成抽象的直線、角度或球的概念並不容易。因此, 雖然1月 1日即有文明的記載, 但是直到4 月15日畢氏定理才出現並開啓幾何學的發展。其次, 被我們稱之爲西方科學發展之重大里程碑的笛卡兒座標系統, 它的相對時間是11月25日。有了座標系統, 四天後的11月29日便有了微積分的發明, 並且促成幾何學在接下來的12月份的迅速發展: 半個多月後的12月14日, 高斯與黎曼的時代來臨; 不到十天, 龐

加萊提出他的代數觀點; 愛因斯坦則是在聖誕節前夕發明了相對論; 陳省身先生的工作以及碎形幾何與混沌理論都是在後來一週之內出現的, 而這些思想不過是距離現在 (12月31日) 幾天之前所發生的事。

雖然幾何學在座標系統提出後有了快速的發展, 但是在思想層次上的改變已經是不多了, 這是否意味著整個發展已接近極致? 從幾何學的發展過程來看, 答案當然是否定的, 人類終將尋覓出一條研究幾何學的新路, 只是無法確定所需時間的長短而已。

未來可能的發展

在本文的最後, 我們提出幾個在本世紀最有可能的發展。當然, 還有許許多多值得深入研究的課題。除了現在的幾何課題之外, 我們認為未來可能的發展方向, 有以下幾個:

一、隨機微分幾何 (Stochastic Differential Geometry) : 在我們所學的數學裡, 其中 代數、分析是屬於『確定』的一類, 另外有一類則是『隨機』的、『統計』的觀點。這一類觀點的幾何學可以對應到物理學中量子力學的觀念。從思想的角度來看, 應該是會有發展的。

二、廣義相對論: 眞正的愛因斯坦時代還沒有到來, 人類對於外太空的瞭解還在非 常初步的階段。

三、電腦輔助幾何設計 (Computer-Aid Geometric Design; CAGD) : 由於資訊科技的發達, 特別是寬頻時代的來臨, 這個方向亦將成為本世紀幾何學的主流之一。

附記: 本文主要是我們根據吳志揚教授在中正大學、台灣大學及清華大學等數學系所的演講稿 (由清大吳進通先生錄音、謄寫) 改寫而成。在此感謝中研院數學所以及吳進通先生的協助。

參考資料

1. 王懷權 編著,『幾何學發展史』, 凡異出版社, 1986。
2. 林炎全、洪萬生、楊康景松 譯,『數學史—數學思想的發展』, 九章出版社, 1983。
3. 葉李華、李國偉 譯,『宇宙的詩篇』, 天下文化, 1997。

—本文作者吳志揚任教於中正大學數學系、陳文豪任教於大葉大學—